修士論文　2025年度（令和7年度）

クラスター代数の可換環論的性質の研究

徳島大学大学院創成科学研究科

理工学専攻 数理科学コース

木内　陽介

令和8年　2月

目次

イントロダクション

本稿を通して，特に断らない限り K は標数 0 の体または $\mathbb{Z}$ とする。

2000 年代初頭，Fomin-Zelevinsky ら（[1, 5, 6]）によって**クラスター代数（団代数）**という概念が導入された。クラスター代数は，**クイバー** Q（有向グラフのこと）と，**クラスター**と呼ばれる変数の集まり $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ から**変異**という操作によって定義される可換 K 代数であり，$\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ と表される。クラスター代数は，元々は表現論的な背景で導入された概念であるが，その後，代数学，解析学，幾何学，数理物理学など様々な分野において自然に表れることが分かっている。

その一例として**フリーズ**[1]という概念がある。フリーズとは，1970 年代初頭に Conway [4] によって導入され，その後，Conway-Coxeter の共同研究（[2, 3]）により発展された概念であり，周期的な数列から，決まった規則で並べられた数字の帯状配列のことであり，組み合わせ論など様々な概念との関連性が指摘されている。フリーズの研究は，1970 年代に Conway–Coxeter によって行われた研究を起点として発展したが，その後しばらく大きな進展は見られなかった。しかし 21 世紀に入り，フリーズとクラスター代数との関係性が注目されるようになり，再び活発に研究が行われている。実際，フリーズの周期性，整数性とクラスター代数の有限性，ローラン現象が対応していることが知られている 。また，フリーズに現れる数列が整数のみからなることはよく知られている。

このように，現在クラスター代数は様々な分野をつなぐ数学全体における中心的な研究対象となっている。一方で，クラスター代数は可換環であるにもかかわらず，その可換環論的な研究はそれほど多くない（[7, 10]）。このような状況を踏まえ，本稿ではクラスター代数の可換環論的な性質を調べる。

まずはクラスター代数の UFD 性質について考える。UFD は可換環において最も基本的なクラスであるため，クラスター代数が UFD であるかどうかは最も基本的な問いである。本稿の最初の目的は Lampe [10] による以下の結果を紹介することである。

定理 0.1. （系 *3.16*）ディンキンクイバーに付随するクラスター代数の UFD 性は以下のようになる。

ディンキン型のタイプ	UFD	not UFD
A 型	A_n $(n \neq 3)$	A_3
D 型	—	D_n $(n \geqq 4)$
E 型	E_n $(n = 6, 7, 8)$	—

[1] フリーズ (frieze) とは，ギリシャ・ローマの建築物に装飾されている，繰り返しのある模様のこと。転じて，帯状の繰り返しのある装飾を指す。

次に，可換環の次元論や代数幾何学の分野において有用な**ネーター正規化**について調べる。第2の結果として，松井氏との共同研究で A_n 型のディンキンクイバーに付随するクラスター代数のネーター正規化を明示的に与えた：

定理 0.2. （定理 *3.18*）A_n 型のディンキンクイバーに関するクラスター代数 $\mathcal{A}(A_n)$ の部分代数 $K[x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, \dots . x_n - x'_n]$ は，$\mathcal{A}(A_n)$ のネーター正規化である。ここで x'_i は x_i の i における変異である。

この定理を用いることで，A_n 型のディンキンクイバーに付随するクラスター代数の Krull 次元を決定することができる。

本稿の構成は次の通りである。第 1 章では，ネーター正規化定理について，体上の場合から整域上の場合への拡張を述べ，定理 1.5 の証明を与える。第 2 章では，クイバー，種，変異およびクラスター代数の基本概念を整理する。あわせて，ローラン現象や下限，上クラスター代数，上限などの本稿で用いる諸概念を導入する。第 3 章では，ディンキンクイバーに付随するクラスター代数の可換環論的性質について考察する。特に，第 3.1 節では，クラスター代数が UFD となるための条件とその証明についての [10] の結果を紹介しディンキンクイバーのときに完全に決定する。第 3.2 節では，A_n 型のディンキンクイバーに付随するクラスター代数のネーター正規化を与える。

約束事

本稿では環は全て可換環とする。また，環 R に対して以下の記号を導入する。

- R の可逆元全体を $R^\times$ と書く。
- R の既約元全体の集合を $\mathrm{Irr}(R)$ と書く。
- R の Krull 次元を $\dim(R)$ と書く。
- R の元 $x_1, x_2, \dots, x_n$ と $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geqq 0}$ に対して
$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$
と書く。
- $\mathbb{R}^n$ における単位ベクトルを $\mathbf{e}_i$ と書く。

謝辞

本研究を進めるにあたり，終始懇切丁寧なご指導を賜りました指導教員の松井先生に深く感謝申し上げます。また，2 年間研究を共にした研究室の皆様に対して心より御礼申し上げます。

第 1 章

ネーター正規化定理

本章では**ネーター正規化定理**とその拡張についての主張と証明を行う。環のネーター正規化は可換環論における最も重要な概念の一つであり，それを用いることで環の Krull 次元，深度および双対化複体を計算することができる。また，Cohen-Macaulay 性の判定をするときにも環のネーター正規化を用いることができる。ネーター正規化や Krull 次元についてのより詳しい事実は [16] を参照されたい。

まず，以下を定義する。

定義 1.1. (1) R を環とし，A を R 上の代数とする。また，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を A の元とする。任意の多項式 $F \in R[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ に対して

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \Longrightarrow F = 0$$

が成り立つとき，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は R **上代数的に独立**であるという。

(2) A を環 R 上の代数とする。A が R 加群として有限生成であるとき，A は R 上**有限**であるという。

有限生成拡大や有限拡大の Krull 次元について以下の事実はよく知られている。

命題 1.2. (1) R 代数 A が R の有限拡大のとき，$\dim(A) = \dim(R)$ が成り立つ。

(2) R をネーター環とする。$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が R 代数 A の元で，R 上代数的に独立であるとする。このとき，$\dim(R[x_1, x_2, \ldots, x_n]) = \dim(R) + n$ が成り立つ。

このように，有限生成拡大を調べることは，Krull 次元などの環の不変量を調べる際に有効となる。以下の定理は可換環論や代数幾何学において重要な役割を果たす。

定理 1.3 (ネーター正規化定理)**.** K を体，A を K 上の有限生成代数とする。このとき，ある有限個の K 上代数的に独立な A の元 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ が存在して，A は $K[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ 上で有限となる。

命題 1.2 と定理 1.3 を用いることで以下の系が言える。これはネーター正規化定理の典型的な応用である。

系 1.4. K を体，A を K 上の有限生成代数とし，A のネーター正規化を $K[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ とする。このとき，$\dim(A) = n$ となる。

以下のネーター正規化定理の拡張は [13] においても述べられているが，私の卒業研究では，それとは独立に主張を定式化し証明を与えた。

定理 1.5 (ネーター正規化定理の拡張 [12])**.** R を整域，A を R 上の有限生成な拡大整域とする。このとき，ある有限個の R 上代数的に独立な A の元 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ と 0 でない R の元 u が存在し，u による局所化 A_u は $R_u[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ 上で有限となる。

証明. R の元の個数が有限であると仮定すると，R は体である。この場合，定理 1.3 より主張は直ちに従う。従って，以下では R の元の個数は無限であると仮定してよい。A の生成元の個数を m 個とすると，$A = R[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ と書ける。m に関する数学的帰納法により主張を示す。

(i) $m = 0$ のとき，$A = R$ なので主張は明らかに成り立つ。

(ii) $m = k\,(k \geqq 0)$ のとき，定理の主張が成り立つと仮定する。

(iii) $m = k+1$ とする。このとき，$A = R[x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}]$ である。$x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ が R 上で代数的に独立である場合は定理の主張は自明である。$x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ が R 上で代数的に独立でないと仮定する。代数独立の定義より，$f(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}) = 0$ を満たす $R[X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}]$ の 0 でない元 f が存在する。必要ならば変数の番号を入れ替えることにより，f に X_{k+1} が現れると仮定してよい。f_0 を f の最高次数の斉次部分とすると，$f_0(X_1, X_2, \ldots, X_k, 1) \neq 0$ が成り立つ。R は無限集合であるから，$c_1, c_2, \ldots, c_k \in R$ で $u \coloneqq f_0(c_1, c_2, \ldots, c_k, 1) \neq 0$ となるものが存在する。ここで，$x'_j \coloneqq x_j - c_j x_{k+1}\,(j = 1, 2, \ldots, k)$ とおく。すると，$x_j = x'_j + c_j x_{k+1}$ であるから

$$0 = f(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}) = u x_{k+1}^s + (R[x'_1, \ldots, x'_k] \text{ 係数で } x_{k+1} \text{ の次数が } s \text{ 未満の項})$$

と書ける。$0 \neq u \in R$ であるため，両辺を u で割ることができる。すると，x_{k+1} は $R[x'_1, x'_2, \ldots, x'_k]_u = R_u[x'_1, x'_2, \ldots, x'_k]$ 上整であることが分かる。$S = R_u, B = S[x'_1, x'_2, \ldots, x'_k]$ とおく。数学的帰納法の仮定を用いると，ある S 上代数的に独立な元 $y_1, y_2, \ldots, y_n \in B$ と 0 でない S の元 v が存在して，B_v は $S_v[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ 上で有限となることが従う。ここで，$v = w/u^t$ とおくと，$S_v \cong R_{uw}$, $(A_u)_v \cong A_{uw}$ が成り立つ。A_u は B 上有限であるから A_{uw} は B_v 上で有限である。従って，A_{uw} は $R_{uw}[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ 上で有限となる。

さらに，次の 2 つが成り立つことを示す。

(a) 十分大きな自然数 N を，$y'_j \coloneqq u^N y_j \in A\ (j = 1, 2, \ldots, n)$ となるように取ることができる。このとき，$\{y'_1, y'_2, \ldots, y'_n\}$ は R 上で代数的に独立である。

(b) $R_{uw}[y_1, y_2, \ldots, y_n] = R_{uw}[y'_1, y'_2, \ldots, y'_n]$

(b) は明らかである。(a) を示すため，$h(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n) = 0$ を満たす $h \in R[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ を任意に取る。$g(X_1, X_2, \ldots, X_n) = h(u^N X_1, u^N X_2, \ldots, u^N X_n)$ と定めると，$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ が成り立つ。しかし，$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ は R_u 上で代数的に独立であるから，$g = 0$ でなければならない。よって，係数を比較することにより $h = 0$ が従う。従って，$\{y'_1, y'_2, \ldots, y'_n\}$ は R 上で代数的に独立である。以上より，A_{uw} は $R_{uw}[y'_1, y'_2, \ldots, y'_n]$ 上で有限でありかつ $\{y'_1, y'_2, \ldots, y'_n\}$ は R_{uw} 上で代数的に独立であることが分かり，$m = k+1$ の場合も主張は成り立つ。

よって主張が示された。 □

この定理により得られる部分環 $R_{uw}[y_1', y_2', \ldots, y_n']$ は A の構造を調べる上で有用である。

定義 1.6. 定理 1.5 の $R[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ を A の**ネーター正規化**と呼ぶ。

命題 1.2 と定理 1.5 より，以下のことが分かる。

系 1.7. A を $\mathbb{Z}$ 上の有限生成な拡大整域であるとする。また，$\mathbb{Z}[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ が A のネーター正規化であるとする。このとき，$\dim(A) = n+1$ である。

最後に具体的なネーター正規化を計算する。

例 1.8. R を整域とする。

(1) $A = R[X_1, X_2, Y_1, Y_2]/I = R[x_1, x_2, y_1, y_2]$ とする。ただし，

$$I = (X_1Y_1 - X_2 - 1,\ X_2Y_2 - X_1 - 1) \subset R[X_1, X_2, Y_1, Y_2]$$

とする。このとき，A は R の拡大整域で，

$$R[x_1 - y_1, x_2 - y_2]$$

は A のネーター正規化である。以下，定理 1.5 の証明に倣ってこれを示す。

- $F = X_1Y_1 - X_2 - 1 \in R[X_1, X_2, Y_1, Y_2]$ とおく。このとき最高次数の項は $F_0 = X_1Y_1$ である。$F_0(X_1, X_2, 1, Y_2) = X_1 \neq 0$ であるから，$(c_1, c_2, c_4) = (1, 0, 0)$ を取れば，$F_0(c_1, c_2, 1, c_4) \neq 0$ となる。ここで，$x_1', x_2', y_2' \in A$ を

$$x_1' = x_1 - y_1, \quad x_2' = x_2, \quad y_2' = y_2$$

で定める。このとき，$x_1 = x_1' + y_1$ であるから，関係式 $x_1y_1 - x_2 - 1 = 0$ より

$$0 = (x_1' + y_1)y_1 - x_2' - 1 = y_1^2 + x_1'y_1 - x_2' - 1$$

となる。 従って，y_1 は $R[x_1', x_2', y_2']$ 上で整である。

- 次に関係式 $x_2y_2 - x_1 - 1 = 0$ に $x_1 = x_1' + y_1$ を代入する。すると，$y_1 = x_2'y_2' - x_1' - 1$ を得る。これを $y_1^2 + x_1'y_1 - x_2' - 1 = 0$ に代入すると，

$$\begin{aligned} 0 &= (x_2'y_2' - x_1' - 1)^2 + x_1'(x_2'y_2' - x_1' - 1) - x_2' - 1 \\ &= x_2'^2y_2'^2 - (x_1' + 2)x_2'y_2' + (x_1' - x_2') \end{aligned}$$

を得る。$G = X_2^2Y_2^2 - (X_1 + 2)X_2Y_2 + (X_1 - X_2)$ とすると，$G(x_1', x_2', y_2') = 0$。G における最高次の項は $X_2^2Y_2^2$ なので，上の議論と同様に $x_1'', x_2'' \in A$ を

$$x_1'' = x_1' = x_1 - y_1, \quad x_2'' = x_2' - y_2' = x_2 - y_2$$

で定める。このとき，

$$\begin{aligned} 0 &= (x_2'' + y_2')^2y_2'^2 - (x_1'' + 2)(x_2'' + y_2')y_2' + (x_1'' - (x_2'' + y_2')) \\ &= y_2'^4 + 2x_2''y_2'^3 + (x_2''^2 - x_1'' - 2)y_2'^2 + (-x_1''x_2'' - 2x_2'' - 1)y_2' + (x_1'' - x_2'') \end{aligned}$$

となり，y_2' は $R[x_1'', x_2'']$ 上整である。

以上の議論より，$A = R[x_1 - y_1, x_2 - y_2, y_1, y_2]$ は $R[x_1'', x_2''] = R[x_1 - y_1, x_2 - y_2]$ 上有限である。また，$x_1 - y_1, x_2 - y_2$ が R 上で代数的に独立であることは第 3.2 節で示される。従って，$R[x_1 - y_1, x_2 - y_2]$ は A のネーター正規化である。

(2) 環 $A = R[X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3]/J = R[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]$ とする。ただし，

$$J = (X_1Y_1 - 1 - X_2,\ X_2Y_2 - X_1 - X_3,\ X_3Y_3 - 1 - X_2) \subset R[X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3]$$

とする。このとき，A は R の拡大整域で，

$$R[x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3]$$

は A のネーター正規化である。 以下，定理 1.5 の証明に倣ってこれを示す。

- $F = X_1Y_1 - 1 - X_2 \in R[X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3]$ とおく。このとき最高次数の項は $F_0 = X_1Y_1$ であり，$F_0(X_1, X_2, X_3, 1, Y_2, Y_3) = X_1 \neq 0$ である。従って，$c_1 \neq 0$ をとれば $F_0(c_1, c_2, c_3, 1, c_5, c_6) \neq 0$ となる。ここでは具体的に $c_1 = 1, c_2 = c_3 = c_5 = c_6 = 0$ を取る。そこで変数変換を

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - c_1y_1 = x_1 - y_1 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \\ y_2' &= y_2 \\ y_3' &= y_3 \end{aligned}$$

  で定めると，$x_1 = x_1' + y_1$ であるから，これを関係式 $x_1y_1 - 1 - x_2 = 0$ に代入すると，

$$0 = (x_1' + y_1)y_1 - 1 - x_2' = y_1^2 + x_1'y_1 - 1 - x_2'$$

  となる。よって，y_1 は $R[x_1', x_2', x_3']$ 上整である。

- 次に関係式 $x_2y_2 - x_1 - x_3 = 0$ に $x_1 = x_1' + y_1$ を代入すると，$y_1 = x_2'y_2' - x_1' - x_3'$ を得る。これを $y_1^2 + x_1'y_1 - 1 - x_2' = 0$ に代入すると，

$$(x_2'y_2' - x_1' - x_3')^2 + x_1'(x_2'y_2' - x_1' - x_3') - 1 - x_2' = 0$$

  となり，これを展開して整理すると，

$$x_2'^2y_2'^2 - (x_1'x_2' + 2x_2'x_3')y_2' + x_3'^2 + x_1'x_3' - 1 - x_2' = 0$$

  を得る。

  そこで変数変換を

$$\begin{aligned} x_1'' &= x_1' &&= x_1 - y_1 \\ x_2'' &= x_2' - y_2' &&= x_2 - y_2 \\ x_3'' &= x_3' &&= x_3 \\ y_3'' &= y_3' &&= y_3 \end{aligned}$$

で定める。$x'_2 = x''_2 + y'_2$ を上記の式に代入すると，

$$
\begin{aligned}
0 &= (x''_2 + y'_2)^2 y'^2_2 - (x''_1(x''_2 + y'_2) + 2(x''_2 + y'_2)x''_3)y'_2 + x''^2_3 + x''_1 x''_3 - 1 - x''_2 + y'_2 \\
&= y'^4_2 + 2x''_2 y'^3_2 + (x''^2_2 - x''_1 - 2x''_2)y'^2_2 - (x''_1 x''_2 + 2x''_2 x''_3 - 1)y'_2 + (x''^2_3 + x''_1 x''_3 - x''_2 - 1)
\end{aligned}
$$

となり，y'_2 は $R[x''_1, x''_2, x''_3]$ 上整である。

- 関係式 $x_3 y_3 - 1 - x_2 = 0$ に $x_3 = x''_3, x_2 = x''_2 + y'_2, y_3 = y''_3$ を代入すると，

$$y'_2 = x''_3 y''_3 - x''_2 - 1$$

となる。これを上の関係式に代入して展開すると，

$$
\begin{aligned}
0 &= (x''_3 y''_3 - x''_2 - 1)^4 + 2x''_2(x''_3 y''_3 - x''_2 - 1)^3 + (x''^2_2 - x''_1 - 2x''_2)(x''_3 y''_3 - x''_2 - 1)^2 \\
&\qquad - (x''_1 x''_2 + 2x''_2 x''_3 - 1)(x''_3 y''_3 - x''_2 - 1) + (x''^2_3 + x''_1 x''_3 - x''_2 - 1) \\
&= x''^4_3 y''^4_3 + f_1 y''^3_3 + f_2 y''^2_3 + f_1 y''_3 + f_0 \\
&\quad (f_i \in R[x''_1, x''_2, x''_3],\ f_i \text{ の各項は } x''_1, x''_2, x''_3 \text{ の高々4 個の積})
\end{aligned}
$$

となる。そこで

$$
\begin{aligned}
x'''_1 &= x''_1 &&= x_1 - y_1 \\
x'''_2 &= x''_2 &&= x_2 - y_2 \\
x'''_3 &= x''_3 - y''_3 &&= x_3 - y_3
\end{aligned}
$$

のように変数変換すると，y''_3 は $R[x'''_1, x'''_2, x'''_3]$ 係数の最高次係数が 1 の多項式の根になることが分かる。よって，y''_3 は $R[x'''_1, x'''_2, x'''_3]$ 上整であることが従う。

ここまでの議論より，$A = R[x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, y_1, y_2, y_3]$ は $R[x'''_1, x'''_2, x'''_3] = R[x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3]$ 上有限である。また，$x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3$ が R 上で代数的に独立であることは，(1) の場合と同様，第 3.2 節で示される。以上より，$R[x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3]$ は A のネーター正規化となる。

なお，上記の環はそれぞれ次章で定義する，A_2 型および A_3 型のディンキンクイバーに付随するクラスター代数と同型である。第 3.2 節において，この結果は一般の A_n 型の場合に拡張される。

第 2 章

クラスター代数の基本

クラスター代数は，今世紀初頭に Fomin と Zelevinsky によって導入された可換環のクラスである。クラスター代数は，**クイバー**[1]と，**クラスター**と呼ばれる変数の集合を初期データとして，**変異**と呼ばれる操作を用いて定義される。この代数は，**フリーズ**をはじめとする様々な分野に現れる現象と密接に関係しており，それらの組み合わせ論的構造を調べる上で有用である。以下では，クラスター代数の議論において基本となる定義および定理を紹介する。

なお，本章で導入する定義および結果は，[10, 14, 15] などを参考にしている。より詳しい内容については，これらの文献を参照されたい。

以下，K を標数 0 の体あるいは $\mathbb{Z}$ とする。まずクイバーに関する基本的な定義を導入する。

定義 2.1. (1) 有限個の頂点と矢を持つ多重有向グラフ Q を**クイバー**と呼ぶ。また，Q の矢 e に対して始点を $s(e)$，終点を $t(e)$ と書く。

(2) Q の矢の列 $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ が

$$s(e_2) = t(e_1),\ s(e_3) = t(e_2), \ldots,\ s(e_r) = t(e_{r-1}),\ s(e_1) = t(e_r)$$

を満たすとき，r**-サイクル**と呼ぶ。

(3) クイバーが**連結**であるとは，任意の頂点 i, j に対して，$i = v_0, v_1, \ldots, v_r = j$ を満たす有限列が存在し，各 $k = 0, 1, \ldots, r-1$ について v_k と v_{k+1} の間に辺が存在することをいう。

(4) 頂点 i, j の間に一本以上の矢が存在するとき，i と j は**隣接**していると呼ぶ。

設定 2.2. 本稿では，以下の状況のもとで議論する。

- クイバーは連結で，1-サイクルと 2-サイクルを持たないようなものであるとする。
- 頂点集合を $Q_0 = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする。
- 頂点 i から j へ向かう矢の本数を $\nu(i, j)$ と書き，**矢の重複度**と呼ぶ。

次に，これらの定義を満たすクイバーの具体例を挙げる。

---

[1]有向グラフのこと。表現論ではクイバーと呼ばれることが多い。

例 2.3.

$$
\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} & 3 \arrow[d] & \\ 1 \arrow[r] & 2 & 4 \arrow[l] \\ & 5 \arrow[u] & \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & 2 \end{tikzcd}
$$

定義 2.4. Q をクイバー，k を頂点とする。任意の頂点 i について $\nu(i,k)=0$ が成り立つとき，k を **source** と呼ぶ。同様に，k から出る矢を一切持たないとき，すなわち，任意の頂点 j について $\nu(k,j)=0$ が成り立つとき，頂点 k を **sink** と呼ぶ。

$$
\begin{tikzcd} & i_1 \\ & i_2 \\ k \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & i_3 \\ & i_4 \\ & i_5 \end{tikzcd}
$$

図 2.1: k は source

$$
\begin{tikzcd} i_1 \arrow[ddr] & \\ i_2 \arrow[dr] & \\ i_3 \arrow[r] & k \\ i_4 \arrow[ur] & \\ i_5 \arrow[uur] & \end{tikzcd}
$$

図 2.2: k は sink

以下で定義するディンキンクイバーは，様々な分野において現れる重要なものである。

定義 2.5. 以下のようなグラフを，A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 型の**ディンキン図形**という。

A_n **型：**

$$
\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash] & 2 \arrow[r, dash] & 3 \arrow[r, dash] & 4 \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & n-1 \arrow[r, dash] & n \end{tikzcd}
$$

D_n **型：**

$$
\begin{tikzcd} & & & & & n \\ 1 \arrow[r, dash] & 2 \arrow[r, dash] & 3 \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & n-2 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\ & & & & & n-1 \end{tikzcd}
$$

E_6 **型：**

$$
\begin{tikzcd} & & 6 \arrow[d, dash] & & \\ 1 \arrow[r, dash] & 2 \arrow[r, dash] & 3 \arrow[r, dash] & 4 \arrow[r, dash] & 5 \end{tikzcd}
$$

E_7 型：

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 7 & & & & & & \\
 & & & & | & & & & & & \\
1 & — & 2 & — & 3 & — & 4 & — & 5 & — & 6
\end{array}
$$

E_8 型：

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & 8 & & & & & & & & \\
 & & & & | & & & & & & & & \\
1 & — & 2 & — & 3 & — & 4 & — & 5 & — & 6 & — & 7
\end{array}
$$

ディンキン図形を底グラフにもつクイバーを**ディンキンクイバー**と呼ぶ。向きの付け方は頂点数を n としたとき，2^{n-1} 通り存在するが，底グラフの型のみが本質的である。

定義 2.6. Q をクイバーとし，k を Q の頂点とする。このとき，k における Q の**変異** $\mu_k(Q)$ を以下の 3 つの操作を順に行って得られるクイバーと定義する。

(i) $i \to k \to j$ なる各矢の列に対して，i から j への矢を一つ加える。

(ii) (i) の操作によって現れた 2 サイクルを無くなるまで消していく。

(iii) k に出入りする矢の向きを逆にする。

例 2.7. (1) クイバー $Q : 1 \to 2 \to 3$ を頂点 2 で変異したクイバー $\mu_2(Q)$ は以下のようになる：

$$
\begin{pmatrix} & & 2 \\ & \nearrow & \downarrow \\ 1 & & 3 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\text{(i)}}
\begin{pmatrix} & & 2 \\ & \nearrow & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & 3 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\text{(ii)}}
\begin{pmatrix} & & 2 \\ & \nearrow & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & 3 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\text{(iii)}} \mu_2(Q) =
\begin{pmatrix} & & 2 \\ & \swarrow & \uparrow \\ 1 & \longrightarrow & 3 \end{pmatrix}
$$

(2) (1) の変異後のクイバー $\mu_2(Q)$ を頂点 1 で変異したクイバー $\mu_1\mu_2(Q)$ は以下のようになる：

$$
\begin{pmatrix} & & 2 \\ & \swarrow & \uparrow \\ 1 & \longrightarrow & 3 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\text{(i)}}
\begin{pmatrix} & & 2 \\ & \swarrow & \uparrow\downarrow \\ 1 & \longrightarrow & 3 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\text{(ii)}}
\begin{pmatrix} & & 2 \\ & \swarrow & \\ 1 & \longrightarrow & 3 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\text{(iii)}} \mu_1\mu_2(Q) =
\begin{pmatrix} & & 2 \\ & \nearrow & \\ 1 & \longleftarrow & 3 \end{pmatrix}
$$

以下, $\mathcal{F} = K(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ を K 上の n 変数の有理関数体とする。

定義 2.8. 種 $(Q, \mathbf{x})$ とは

- 頂点集合が $\{1, 2, \ldots, n\}$ のクイバー Q
- K 上代数的に独立な $\mathcal{F}$ の元の列 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

の組からなるものである。ここで，$\mathbf{x}$ を**クラスター**，各 x_i を**クラスター変数**と呼ぶ。

定義 2.9. $(Q, \mathbf{x})$ を種とする。このとき，各 $i \in Q_0$ に対して，

$$
f_i = \prod_{\nu(j,i)>0} x_j^{\nu(j,i)} + \prod_{\nu(i,j)>0} x_j^{\nu(i,j)}
$$

と定義し，これを頂点 i における**交換多項式**と呼ぶ。

例 2.10. (1) クイバー $Q: 1 \to 2$ に対する交換多項式は,

$$f_1 = 1 + x_2, \quad f_2 = 1 + x_1$$

で与えられる。

(2) クイバー $Q: 1 \to 2 \to 3$ に対する交換多項式は,

$$f_1 = 1 + x_2, \quad f_2 = x_1 + x_3, \quad f_3 = 1 + x_2$$

である。

次に種の変異を定義する。

定義 2.11. $(Q, \mathbf{x})$ を種とし, k を Q の頂点とする。このとき, 以下のようにして定義される種 $\mu_k(Q, \mathbf{x}) = (\mu_k(Q), \mu_k(\mathbf{x}))$ を $(Q, \mathbf{x})$ の k における変異と呼ぶ。

- クイバーは, Q の k における変異 $\mu_k(Q)$
- クラスターは,

$$\mu_k(\mathbf{x}) = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x'_k, x_{k+1}, \ldots, x_n), \quad x'_k = x_k^{-1} f_k$$

種の変異については様々な結果が知られている。特に重要な事実を紹介する。

注意 2.12 ([14, 命題 2.4])**.** 次が成り立つ。

(1) $x_1, \ldots, x_{k-1}, x'_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ は体 K 上で代数的に独立である。特に, $\mu_k(Q, \mathbf{x})$ は再び種を与える。

(2) 変異 μ_k を二度繰り返すと元の種に戻る。つまり

$$\mu_k\big(\mu_k(Q, \mathbf{x})\big) = (Q, \mathbf{x})$$

が成り立つ。

ここで種の変異の具体例を与える。

例 2.13. (1) A_2 型クイバー $Q : 1 \to 2$ を取り, クラスターを $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ とする。このときの $(Q, \mathbf{x})$ の変異をいくつか計算する。

$$\begin{aligned}
\mu_1(\mathbf{x}) &= \left(\frac{1 + x_2}{x_1}, x_2\right) \\
\mu_2(\mathbf{x}) &= \left(x_1, \frac{1 + x_1}{x_2}\right) \\
\mu_2(\mu_1(\mathbf{x})) &= \left(\frac{1 + x_2}{x_1}, \frac{1 + x_1 + x_2}{x_1 x_2}\right)
\end{aligned}$$

(2) A_3 型クイバー $Q : 1 \to 2 \to 3$ を取り，クラスターを $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ とする。このとき，$(Q, \mathbf{x})$ における変異をいくつか計算する。

$$\mu_1(\mathbf{x}) = \left(\frac{1+x_2}{x_1}, x_2, x_3\right)$$
$$\mu_2(\mathbf{x}) = \left(x_1, \frac{x_1+x_3}{x_2}, x_3\right)$$
$$\mu_3(\mathbf{x}) = \left(x_1, x_2, \frac{1+x_2}{x_3}\right)$$
$$\mu_1(\mu_2(\mathbf{x})) = \left(\frac{x_1+x_3+x_2x_3}{x_1x_2}, \frac{x_1+x_3}{x_2}, x_3\right)$$ 変更

定義 2.14. $(Q, \mathbf{x})$ と $(R, \mathbf{y})$ を種とする。ある有限列 $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ $(1 \leqq k_j \leqq n)$ が存在して $(R, \mathbf{y}) = \mu_{k_1}\mu_{k_2}\cdots\mu_{k_r}(Q, \mathbf{x})$ が成り立つとき，$(Q, \mathbf{x})$ と $(R, \mathbf{y})$ は**変異同値**であるという。このとき，$(Q, \mathbf{x}) \sim (R, \mathbf{y})$ と書く。

注意 2.12(2) より, この関係は同値関係を与える。以上で定義したことを元にクラスター代数を定義する。

定義 2.15. $(Q, \mathbf{x})$ を種とする。$(Q, \mathbf{x})$ と変異同値な種 $(R, \mathbf{y})$ に現れるクラスター変数全体の集合

$$\mathcal{X}(Q, \mathbf{x}) = \{\, y_i \mid (R, \mathbf{y}) \sim (Q, \mathbf{x}),\ 1 \leq i \leq n \,\}$$

を考える。このとき，$\mathcal{X}(Q, \mathbf{x})$ により生成される $\mathcal{F}$ の K 部分代数

$$\mathcal{A}(Q, \mathbf{x}) := K[\mathcal{X}(Q, \mathbf{x})]$$

を**初期種** $(Q, \mathbf{x})$ により生成される**クラスター代数**と呼ぶ。また，$\mathbf{x}$ を**初期クラスター**と呼び，各 x_i を**初期クラスター変数**と呼ぶ。初期クラスターが明らかな場合には，$\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ を単に $\mathcal{A}(Q)$ と書くこともある。

例 2.16. (1) $Q : 1 \to 2$ を A_2 型のディンキンクイバー，初期クラスターを $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ とする。このとき，変異により得られるクラスター変数は以下の 5 つである。

$$x_1, x_2, \frac{1+x_1}{x_2}, \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}$$

よってこのときのクラスター代数は

$$\mathcal{A}(Q, \mathbf{x}) = K\left[x_1,\ x_2,\ \frac{1+x_2}{x_1},\ \frac{1+x_1}{x_2},\ \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}\right]$$

である。

(2) $Q : 1 \to 2 \to 3$ を A_3 型のディンキンクイバー，初期クラスターを $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ とする。このとき，変異により得られるクラスター変数は以下の 9 つである。

$$x_1, x_2, x_3, \frac{1+x_1}{x_2}, \frac{x_1+x_3}{x_2}, \frac{1+x_2}{x_3}, \frac{x_1+x_3+x_2x_3}{x_1x_2}, \frac{x_1+x_3+x_1x_2}{x_2x_3}, \frac{x_1+x_3+x_1x_2+x_2x_3}{x_1x_2x_3}$$

よってこのときのクラスター代数は

$$\mathcal{A}(Q, \mathbf{x}) = K\left[x_1,\ x_2,\ x_3,\ \frac{1+x_2}{x_1},\ \frac{x_1+x_3}{x_2},\ \frac{1+x_2}{x_3},\ \frac{x_1+x_3+x_2x_3}{x_1x_2},\ \frac{x_1+x_3+x_1x_2}{x_2x_3},\ \frac{x_1+x_3+x_1x_2+x_2x_3}{x_1x_2x_3}\right]$$

である。

また，クラスター変数が全てローラン多項式になっていることは重要な事実である。つまり次の定理が言える。

定理 2.17 (ローラン現象 [5, Theorem 3.1])**.** 種 $(Q, \mathbf{x})$ に対して，クラスター代数 $\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ は $K[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ の部分代数である。つまり $(Q, \mathbf{x})$ から変異を有限回繰り返して得られる種のクラスター変数は，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ のローラン多項式である。

次の定理はクラスター代数において最も重要な定理の一つである。

定理 2.18 (有限性 [6, Theorem 1.8])**.** Q がディンキンクイバーと変異同値のとき，クラスター代数 $\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ は有限個のクラスター変数を持つ。

ここで以下の 3 つの K 代数を導入する。

定義 2.19. $\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ の任意のクラスター $\mathbf{y}$ に対して，$\mathcal{L}_{\mathbf{y}}$ を $K[y_1^{\pm}, y_2^{\pm}, \ldots, y_n^{\pm}]$ と定義する。以下のように定義される K 代数をそれぞれ**下限**，**上クラスター代数**，**上限**と呼ぶ。

$$\mathcal{L}(Q, \mathbf{x}) = K\left[x_1, x_1', \ldots, x_n, x_n'\right],$$
$$\bar{\mathcal{A}}(Q, \mathbf{x}) = \bigcap_{(R, \mathbf{y}) \sim (Q, \mathbf{x})} \mathcal{L}_{\mathbf{y}},$$
$$\mathcal{U}(Q, \mathbf{x}) = \mathcal{L}_{\mathbf{x}} \cap \bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{L}_{\mu_k(\mathbf{x})}.$$

ただし，$x_i' = \mu_i(\mathbf{x})_i = x_i^{-1} f_i$ である。

名称が示すように，以下の包含関係が成立することは容易に分かる。

$$\mathcal{L}(Q, \mathbf{x}) \ \subseteq\ \mathcal{A}(Q, \mathbf{x}) \ \subseteq\ \bar{\mathcal{A}}(Q, \mathbf{x}) \ \subseteq\ \mathcal{U}(Q, \mathbf{x})$$

定義 2.20. $(Q, \mathbf{x})$ を種とする。

(1) クイバー Q がサイクルを含まないとき，種 $(Q, \mathbf{x})$ は**非輪状**であるという。

(2) 任意の異なる 2 頂点 $i, j \in Q_0$ に対して，対応する交換多項式 f_i, f_j が互いに素であるとき，種 $(Q, \mathbf{x})$ は**互いに素**であるという。

注意 2.21. Q がディンキンクイバーのとき，種 $(Q, \mathbf{x})$ は非輪状である。

例 2.22. (1) Q を D_4 型のディンキンクイバー

$$\begin{tikzcd} & & & 4 \\ 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & & 5 \end{tikzcd}$$

とする。このとき，$f_4 = 1 + x_3 = f_5$ となるので，f_4, f_5 は互いに素ではない。従って，$(Q, \mathbf{x})$ は非輪状であり，互いに素ではない。

(2) Q を A_4 型のディンキンクイバー

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4$$

とする。このとき，$f_1 = 1 + x_2, f_2 = x_1 + x_3, f_3 = x_2 + x_4, f_4 = 1 + x_3$ はどの 2 つも互いに素である。従って，$(Q, \mathbf{x})$ は非輪状かつ互いに素である。

非輪状や互いに素な種から定まるクラスター代数は可換環論的性質を調べる上で多くの利点がある。その例として以下の定理を紹介する。

定理 2.23 ([1, Colorralry 1.9, Theorem 1.18, Theorem 1.20, Corollary 1.21])**.** (1) $(Q, \mathbf{x})$ を非輪状な種とする。このとき次の K 代数の同型が存在する。

$$\mathcal{A}(Q, \mathbf{x}) = \mathcal{L}(Q, \mathbf{x}) \cong K[X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]/I$$

ただし，$I = (X_j Y_j - f_j \mid j = 1, 2, \ldots, n)$ とする。ここで，この同型は以下のように与えられる。

$$x_i \longleftrightarrow \bar{X}_i, \quad x'_i \ (= x_i^{-1} f_i) \longleftrightarrow \bar{Y}_i$$

特に，$\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ は $x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ により K 代数として生成される。

(2) $(Q, \mathbf{x})$ を互いに素かつ非輪状な種とする。このとき，$\mathcal{L}(Q, \mathbf{x}) = \mathcal{A}(Q, \mathbf{x}) = \bar{\mathcal{A}}(Q, \mathbf{x}) = \mathcal{U}(Q, \mathbf{x})$ が成り立つ。

また，次の定理よりクラスター代数はディンキンクイバーの矢の向きによらずに一意に定まる。

定理 2.24 ([6, Theorem 8.6])**.** 底グラフが同一であるディンキンクイバー Q, Q' に対して，それらに付随するクラスター代数 $\mathcal{A}(Q)$ と $\mathcal{A}(Q')$ は K 代数として同型である。

定理 2.24 より，ディンキンクイバーに付随するクラスター代数はクイバーの向き付けによらず，また，定理 2.23(1) より，生成元と関係式による表示が与えられる。以下では，各ディンキンクイバーに対してその一つの向き付けと付随するクラスター代数の表示を与える。

例 2.25. 以下，イデアル I を $I = (X_i Y_i - f_i \mid i = 1, 2, \ldots, n)$ とする。

- **A_n 型の場合：**

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n-1 \longrightarrow n$$

以下のような同型が成り立つ。

$$\mathcal{A}(A_n) \cong K[X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]/I$$

ただし f_i は

$$f_i := \begin{cases} 1 + X_2 & (i = 1) \\ X_{i-2} + X_{i+1} & (i = 2, 3, \ldots, n-1) \\ 1 + X_{n-1} & (i = n) \end{cases}$$

である。

- D_n **型の場合：**

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & & & & & n \\ & & & & & & & & & \nearrow & \\ 1 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & n-2 & & \\ & & & & & & & & & \searrow & \\ & & & & & & & & & & n-1 \end{array}$$

以下のような同型が成り立つ。

$$\mathcal{A}(D_n) \cong K[X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]/I,$$

ただし f_i は

$$f_i \coloneqq \begin{cases} 1 + X_2 & (i = 1) \\ X_{i-1} + X_{i+1} & (i = 2, 3, \ldots, n-3) \\ X_{n-3} + X_{n-1}X_n & (i = n-2) \\ 1 + X_{n-2} & (i = n-1, n) \end{cases}$$

である。

- E_6 **型の場合：**

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 6 & & & & \\ & & & & \uparrow & & & & \\ 1 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 5 \end{array}$$

以下の同型が成り立つ。

$$\mathcal{A}(E_6) \cong K[X_1, X_2, \ldots, X_6, Y_1, Y_2, \ldots, Y_6]/I$$

ただし f_i は

$$f_i \coloneqq \begin{cases} 1 + X_2 & (i = 1) \\ X_1 + X_3 & (i = 2) \\ X_2 + X_4X_6 & (i = 3) \\ X_3 + X_5 & (i = 4) \\ 1 + X_4 & (i = 5) \\ 1 + X_3 & (i = 6) \end{cases}$$

である。

- E_7 **型の場合：**

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 7 & & & & & & \\ & & & & \uparrow & & & & & & \\ 1 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 5 & \longrightarrow & 6 \end{array}$$

このとき以下の同型が成り立つ。

$$\mathcal{A}(E_7) \cong K[X_1, X_2, \ldots, X_7, Y_1, Y_2, \ldots, Y_7]/I$$

ただし f_i は

$$f_i \coloneqq \begin{cases} 1+X_2 & (i=1) \\ X_1+X_3 & (i=2) \\ X_2+X_4X_7 & (i=3) \\ X_3+X_5 & (i=4) \\ X_4+X_6 & (i=5) \\ 1+X_5 & (i=6) \\ 1+X_3 & (i=7) \end{cases}$$

である。

- E_8 **型の場合：**

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & 8 & & & & & & & & \\ & & & & \uparrow & & & & & & & & \\ 1 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 5 & \longrightarrow & 6 & \longrightarrow & 7 \end{array}$$

このとき以下の同型が成り立つ。

$$\mathcal{A}(E_8) \cong K[X_1, X_2, \ldots, X_8, Y_1, Y_2, \ldots, Y_8]/I$$

ただし f_i は

$$f_i \coloneqq \begin{cases} 1+X_2 & (i=1) \\ X_1+X_3 & (i=2) \\ X_2+X_4X_8 & (i=3) \\ X_3+X_5 & (i=4) \\ X_4+X_6 & (i=5) \\ X_5+X_7 & (i=6) \\ 1+X_6 & (i=7) \\ 1+X_3 & (i=8) \end{cases}$$

である。

定理 2.24 によりクラスター代数はディンキンクイバーの向き付けに依存しないので，以降は各ディンキンクイバーを例 2.25 で示した形に固定して議論する。次章では，ディンキンクイバーに付随するクラスター代数の UFD 性とそのネーター正規化について考察する。

第 3 章

可換環論的性質に関する考察

本章ではクラスター代数の可換環論的性質について考察する。特に UFD 性とネーター正規化を主眼に議論する。特に本章以降の議論は，クラスター代数の基礎的事項およびその考え方を参考にしている。詳細については [10, 14] を参照されたい。

以下，K を標数 0 の体もしくは $\mathbb{Z}$ とする。

3.1 節　クラスター代数の一意分解性について

この節では，ディンキンクイバーに付随するクラスター代数の UFD 性について，[10] の結果を紹介する。

Geiss–Leclerc–Schröer [8] によって，クラスター代数の環構造について以下の結果が示されている。

定理 3.1 ([8, Theorem 1.3])**.** $(Q, \mathbf{x})$ を種とする。このとき以下が成り立つ。

(1) $\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})^\times = K^\times$

(2) $\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ に含まれる任意のクラスター変数は既約元である。

定理 3.2 ([8, Proposition 6.1])**.** $f_i = f_j$ を満たす 2 つの異なる頂点 i, j が存在するならば，$\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ は UFD ではない。

定理 3.2 より次の系が言える。

系 3.3. A_3, D_n 型ディンキンクイバーのクラスター代数は UFD ではない。

証明. A_3 **型について：**交換多項式 f_1, f_3 は $f_1 = 1 + x_2 = f_3 \in K[x_1, x_2, x_3]$ を満たし，互いに素ではない。従って，定理 3.2 により，$\mathcal{A}(A_3)$ は UFD ではない。

D_n **型について：**交換多項式 f_{n-1}, f_n は $f_{n-1} = f_n = 1 + x_{n-2} \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ を満たし，かつ互いに素ではない。ここで再び定理 3.2 を用いることにより，$\mathcal{A}(D_n)$ は UFD ではないことが分かる。 □

[8] の結果はクラスター代数の UFD 性の必要条件を与えるものであり，例 3.3 以外のディンキンクイバーの UFD 性を判定することはできない。一方で，[10] は UFD 性の十分条件を与え，そ

れを用いてすべてのディンキンクイバーに付随するクラスター代数の UFD 性を決定した。以下では [10] による結果を紹介する。

これより次の設定で議論する。

設定 3.4. 以下, 初期種 $(Q, \mathbf{x})$，交換多項式 f_i について次を仮定する。

- $(Q, \mathbf{x})$ は非輪状である。
- $(Q, \mathbf{x})$ は互いに素である。
- $f_1, f_2, \ldots, f_n$ は全て K 上で既約である。

A_n 型（$n \neq 3$），E_6, E_7, E_8 型のディンキンクイバーの場合はこれらの条件が満たされる。また，任意の $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ について

$$\begin{aligned} R &\coloneqq K[x_1, x_2, \ldots, x_n] \\ R_i &\coloneqq K[x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n] \\ I_i &\coloneqq (x_i, f_i) \subseteq K[x_1, x_2, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

と定義する。ここで，$f_i \in R_i$ であることに注意する。以下の補題を示す。

補題 3.5. $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ とし，a_i を 0 以上の整数とする。また，R の元 P を $P = \sum_{k=0}^{\infty} P_k\, x_i^k\ (P_k \in R_i)$ と書く。このとき，$P \in I_i^{a_i}$ と，任意の $k \leqq a_i$ に対して，$P_k \mid f_i^{a_i - k}$ が成り立つことは同値である。

証明. P が $I_i^{a_i}$ に含まれていると仮定する。定義により，$P = \sum_{r=0}^{a_i} A_r x_i^r f_i^{a_i - r}$ を満たす R の元 A_r が存在する。また，各 r に対して $A_r = \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} x_i^s\ (A_{rs} \in R_i)$ と表す。すると，P は $\sum_{r,s} A_{rs} x_i^{r+s} f_i^{a_i - r}$ と表されるので

$$P_k = \sum_{r+s=k} A_{rs} f_i^{a_i - r}$$

となり，$f_i^{a_i - k}$ で割り切れる。以上の議論から，$P \in I_i^{a_i}$ であるならば，$P_k \mid f_i^{a_i - k}\ (\forall k \leqq a_i)$ であることが示された。一方で，後者の条件から前者が従うことは，$f_i^{a_i - k} x_i^k \in I_i^{a_i}$ より直ちに分かる。 □

ここで次の補題を示す前に新たに記号を導入する。

定義 3.6. $P \in R$ とする。

(1) P を x_i の多項式で表したときの x_i^k の係数を $[x_i^k]P$ と書く。

(2) $P \in I_i^m \setminus I_i^{m+1}$ を満たす m が唯 1 つ存在するので，それを $m_i(P)$ と書く。また，$\mathbf{m}(P) = (m_1(P), m_2(P), \ldots, m_n(P))$ とおき，単項式 $M(P)$ を $M(P) = \mathbf{x}^{\mathbf{m}(P)} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i(P)}$ と定義する。

それでは次の 2 つの補題を示す。

補題 3.7. i, j を異なる頂点する。このとき，$f_i, x_i \notin I_j$ である。

証明. i と j の間に一本以上の矢があると仮定する。すると，一方のみが x_j によって割られるような単項式 M_i, M_i' が存在し，$f_i = M_i + M_i'$ が成立する。従って $[x_j^0]f_i$ は M_i もしくは M_i' となるため，f_i では割り切れない。また，補題 3.5 を $a_j = 1, P = f_i$ として用いれば $f_i \notin I_j$ が分かる。次に i と j が連結していないと仮定する。f_i を構成する 2 つの単項式のいずれも x_j を割り切らないので $[x_j^0]f_i = f_i$ が導かれる。f_i, f_j は互いに素であるため, $f_j \nmid f_i$。ここで再び補題 3.5 を用いることにより, $f_i \notin I_j$ が従う。

次に $x_i \notin I_j$ を示す。補題 3.5 の主張における P として x_i をとれば，$P_0 = P_1 = 1$ となる。$f_j^{1-0} = f_j$ は $P_0 = 1$ を割らないため，補題 3.5 を用いれば, $x_i \notin I_j$ が導かれる。

以上より題意は示された。 □

補題 3.8. $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ とし，a_i を 0 以上の整数とする。また，$P, Q \in R$ が $PQ \in I_i^{a_i}$ を満たすとする。このとき，$P \in I_i^{b_i}$ かつ $Q \in I_i^{a_i - b_i}$ を満たす $0 \leqq b_i \leqq a_i$ が存在する。

証明. $P \in I_i^k$ を満たす最大の自然数 k と $Q \in I_i^l$ を満たす最大の自然数 l を取る。このとき，$k + l \geqq a_i$ を示せばよい。実際，$a_i < k$ のとき $a_i - l \leqq b_i \leqq a_i$ を満たす b_i を取れば良く，$a_i \geqq k$ かつ $k + l \geqq a_i$ のときは，$a_i - l \leqq b_i \leqq k$ を満たす b_i を取れば良い。$k + l + 1 \leqq a_i$ と仮定して矛盾を導く。I_i^k の元 P は,

$$P = \sum_{r=0}^{k} A_r\, x_i^r\, f_i^{k-r} \quad (A_r \in R)$$

と書ける。同様に,

$$Q = \sum_{t=0}^{l} B_t\, x_i^t\, f_i^{l-t} \quad (B_t \in R)$$

と書ける。ここで，A_r, B_t はそれぞれ R_i の元 A_{rs}, B_{tu} を用いて $\sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} x_i^s, \sum_{u=0}^{\infty} B_{tu}\, x_i^u$ と表せる。従ってその積は

$$\begin{aligned} PQ &= \sum_{\substack{0 \leqq r \leqq k,\ 0 \leqq t \leqq l \\ s, u \geqq 0}} A_{rs}\, B_{tu}\, x_i^{r+s+t+u}\, f_i^{k+l-r-t} \\ &= \sum_{0 \leqq r \leqq k,\, 0 \leqq t \leqq l} A_{r0}\, B_{t0}\, x_i^{r+t}\, f_i^{k+l-r-t} + \sum_{\substack{0 \leqq r \leqq k,\ 0 \leqq t \leqq l \\ s+u \geqq 1}} A_{rs}\, B_{tu}\, x_i^{r+s+t+u}\, f_i^{k+l-r-t} \end{aligned} \tag{3.1}$$

となる。$s + u \geqq 1$ である限り，$x_i^{r+s+t+u}\, f_i^{k+l-r-t} \in I_i^{k+l+1}$ なので，(3.1) の第 2 項目は I_i^{k+l+1} の元である。また，$PQ \in I_i^{a_i} \subseteq I_i^{k+l+1}$ であるから,

$$\sum_{0 \leqq r \leqq k,\, 0 \leqq t \leqq l} A_{r0} B_{t0} x_i^{r+t}\, f_i^{k+l-r-t} \in I_i^{k+l+1}$$

が従う。よって，補題 3.5 を用いると任意の $0 \leqq N \leqq k + l$ に対して,

$$f_i | \sum_{r+t=N} A_{r0} B_{t0}$$

が成り立つ。

ここで任意の $0 \leqq r \leqq k$ に対して $f_i \mid A_{r0}$ が成り立つか，もしくは任意の $0 \leqq t \leqq l$ に対して $f_i \mid B_{t0}$ が成り立つことを背理法で示す。$f_i \nmid A_{r0}$ となる r が存在し，かつ $f_i \nmid B_{t0}$ となる t が存在すると仮定する。このような r のうち最小の数を r_0 とし，同様にこのような t のうち最小の数を t_0 とおく。このとき，$N = r_0 + t_0$ とすると

$$\sum_{r+t=N} A_{r0}B_{t0} = A_{00}B_{r_0+t_0,0} + \cdots + A_{r_0-1,0}B_{t_0+1,0} + A_{r_00}B_{t_00} + A_{r_0+1,0}B_{t_0-1,0} + \cdots + A_{r_0+t_0,0}B_{00}$$

となる。ここで，r_0 と t_0 の取り方より，$A_{00}, \ldots, A_{r_0-1,0}, B_{00}, \ldots, B_{t_0-1,0}$ は f_i で割り切れ，一方で，$A_{r_00}B_{t_00}$ は f_i で割り切れない。これは，$f_i \mid \sum_{r+t=N} A_{r0}B_{t0}$ に矛盾する。従って，任意の $0 \leqq r \leqq k$ に対して $f_i \mid A_{r0}$ が成り立つか, もしくは任意の $0 \leqq t \leqq l$ に対して $f_i \mid B_{t0}$ が成り立つ。任意の $0 \leqq r \leqq k$ に対して $f_i \mid A_{r0}$ が成り立つとする。このとき次が成り立つ。

$$P = \sum_{0 \leqq r \leqq k, s \geqq 0} A_{rs}x_i^{r+s}f_i^{k-r} = \sum_{0 \leqq r \leqq k} A_{r0}x_i^r f_i^{k-r} + \sum_{0 \leqq r \leqq k, s \geqq 1} A_{rs}x_i^{r+s}f_i^{k-r} \in I_i^{k+1}$$

これは k の最大性に矛盾する。同様に，任意の $0 \leqq t \leqq l$ に対して $f_i \mid B_{t0}$ が成り立つとすると，$Q \in I_i^{l+1}$ となるが，これは l の最大性に矛盾する。

従って，最初の仮定 $k + l + 1 \leqq a_i$ は誤りである。よって，$k + l \geqq a_i$ が成り立つ。 □

補題 3.9. 任意の $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ と 1 以上の整数 a_i に関して，$I_i^{a_i}$ は準素イデアルである。また，$\sqrt{I_i^{a_i}} = I_i$ が成り立つため，I_i は素イデアルである。

証明. $P, Q \in R$ が $PQ \in I_i^{a_i}$ かつ $P \notin I_i^{a_i}$ を満たすとする。補題 3.8 より $P \in I_i^{b_i}$ かつ $Q \in I_i^{a_i-b_i}$ を満たす 0 以上 a_i 以下の整数 b_i が存在する。$b_i = a_i$ だと仮定に反するので $b_i < a_i$ である。よって，$I_i^{a_i-b_i}$ は I_i に含まれるので，$Q \in I_i = \sqrt{I_i^{a_i}}$ である。以上より，$\sqrt{I_i^{a_i}}$ が I_i の準素イデアルであることが示された。 □

環 R のイデアル I, J が $I + J = R$ を満たすとき，I, J は**互いに素**であるという。また，I, J が互いに素ならば次が成り立つ。

(1) 任意の 1 以上の整数 a, b に関して，I^a と J^b が互いに素である。

(2) $I \cap J = IJ$ が成り立つ。

イデアル I_i と I_j が互いに素であるかどうかは，クイバーの構造と関係がある。

補題 3.10. $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ が sink もしくは source であるとする。このとき，i が j と隣接している場合，I_i と I_j は互いに素である。

証明. sink, source の定義より $f_i = 1 + M_i$ を満たす単項式 M_i が存在する。i と j の隣接性より M_i は x_j を因数にもつ。よって I_j の定義より $M_i \in I_j$ である。従って，$1 = f_i - M_i \in I_i + I_j$ となるため，I_i と I_j は互いに素である。 □

注意 3.11. クラスター代数 $\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ は以下の和集合と等しい。

$$\mathcal{A}(Q, \mathbf{x}) = \bigcup_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} \left\{ \frac{P}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}} \;\middle|\; P \in I_1^{a_1} \cdots I_n^{a_n} \right\}$$

実際，$\frac{P}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}$ を右辺の集合から取ったとき，$P \in I_1^{a_1} \cdot I_2^{a_2} \cdots I_n^{a_n}$ なので，

$$P = \sum_{\mathbf{b} \leqq \mathbf{a}} g_{\mathbf{b}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}-\mathbf{b}} \mathbf{f}^{\mathbf{b}} \quad (g_{\mathbf{b}} \in R)$$

となり，

$$\frac{P}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}} = \sum_{\mathbf{b} \leqq \mathbf{a}} g_{\mathbf{b}} \frac{\mathbf{f}^{\mathbf{b}}}{\mathbf{x}^{\mathbf{b}}} = \sum_{\mathbf{b} \leqq \mathbf{a}} g_{\mathbf{b}} \mathbf{x'}^{\mathbf{b}} \in \mathcal{L}(Q, \mathbf{x})$$

を得る。従って，右辺は $\mathcal{L}(Q, \mathbf{x})$ に含まれる。一方で，$x_i' = x_i^{-1} f_i$ であるから，$\mathbf{a} = \mathbf{e}_i, P = f_i$ とすれば右辺に x_i' が含まれることが分かる。よって，$\mathcal{L}(Q, \mathbf{x})$ は右辺に含まれる。従って，

$$\mathcal{L}(Q, \mathbf{x}) = \bigcup_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} \left\{ \frac{P}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}} \;\middle|\; P \in I_1^{a_1} \cdot I_2^{a_2} \cdots I_n^{a_n} \right\}$$

である。定理 *2.23(2)* より，$\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ は下限 $\mathcal{L}(Q, \mathbf{x})$ と等しいので，上の等号が示された。

条件 3.12 ([10, Conjecture 3.10])**.** 任意の $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して，

$$I_1^{a_1} \cdot I_2^{a_2} \cdots I_n^{a_n} = I_1^{a_1} \cap I_2^{a_2} \cap \cdots \cap I_n^{a_n}$$

が成り立つ。

この条件はいつも成り立つとは限らないことには注意が必要である。以下がその一例である。

例 3.13. A_3 型クラスター代数 $\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ において条件 3.12 は成り立たない。実際それぞれのイデアルは，$I_1 = (x_1, x_2 + x_3), I_2 = (x_2, x_3 + x_1), I_3 = (x_3, x_1 + x_2)$ であるため，$x_1 + x_2 + x_3 \in I_1 \cap I_2 \cap I_3$ が成り立つ。一方，$x_1 + x_2 + x_3 \notin I_1 I_2 I_3$ が成り立つため，$I_1 \cdot I_2 \cdot I_3$ と $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ は異なるイデアルである。

後ほど見るが，この主張は $\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ が UFD であることを導く。従って，条件 3.12 を満たす場合について考察することがこの節の肝心な部分である。ここで簡単のために，次の記号を導入する。

- $a_i \geqq b_i \, (1 \leqq \forall i \leqq n)$ が成り立つとき, $\mathbf{a} \geqq \mathbf{b}$ と書く。
- $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \coloneqq x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}$
- $\mathbf{f}^{\mathbf{a}} \coloneqq f_1^{a_1} \cdot f_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot f_n^{a_n}$
- $\mathbf{x'}^{\mathbf{a}} \coloneqq {x_1'}^{a_1} \cdot {x_2'}^{a_2} \cdot \ldots \cdot {x_n'}^{a_n} \ \left(= \frac{\mathbf{f}^{\mathbf{a}}}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}\right)$
- $\mathbf{I}^{\mathbf{a}} \coloneqq I_1^{a_1} \cdot I_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot I_n^{a_n} \ (= (\mathbf{x}^{\mathbf{a}-\mathbf{b}} f^{\mathbf{b}} \mid \mathbf{b} \leqq \mathbf{a}))$

注意 3.14. 条件 *3.12* が正しいと仮定すると，注意 *3.11* における和集合は次の形に書き直される。

$$\mathcal{A}(Q, \mathbf{x}) = \bigcup_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} \left\{ \frac{P}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}} \;\middle|\; P \in I_1^{a_1} \cap I_2^{a_2} \cap \cdots \cap I_n^{a_n} \right\}$$

ここで，右辺の集合から $\frac{P}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}$ を取る。$a_i \neq 0$ かつ $P = x_i P'$ とする。このとき，$x_i P' \in I_j^{a_j}$ であるので，補題 *3.8* より，$x_i \in I_j^{b_j}$ かつ $P' \in I_j^{a_j - b_j}$ を満たす $0 \leqq b_j \leqq a_j$ が存在する。$j \neq i$ の

とき，補題 *3.7* より，$b_j = 0$ となり，$P' \in I_j^{a_j}$ である。 一方で，$x_i \notin I_i^2$ より，$b_i \leqq 1$ となり，$P' \in I_i^{b_i} \subseteq I_i^{a_i-1}$ である。以上の議論より，

$$\frac{P}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}} = \frac{P'}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}} \text{ かつ } P' \in I_1^{a_1} \cap \cdots \cap I_i^{a_i-1} \cap \cdots \cap I_n^{a_n}$$

となる。同様の操作を繰り返すことで，$\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ の元は

$$\frac{P}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}} \quad (P \in I_1^{a_1} \cap I_2^{a_2} \cap \ldots \cap I_n^{a_n} \text{ かつ } x_i \nmid P \ (a_i \neq 0))$$

と表せる。従って，$\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ に対し，

$$S(\mathbf{a}) = \{\, P \in I_1^{a_1} \cap I_2^{a_2} \cap \ldots \cap I_n^{a_n} \mid x_i \nmid P \ (a_i \neq 0) \,\} \quad (\text{特に } R = S(\mathbf{0}) \text{ である。})$$

と定めると，

$$\mathcal{A}(Q, \mathbf{x}) = \bigcup_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} \frac{S(\mathbf{a})}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}} \tag{3.2}$$

が成り立つ。

これまでの注意，補題を用いて以下の定理を示す。

定理 3.15. 条件 *3.12* が成り立つと仮定する。このとき，クラスター代数 $\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ は UFD である。さらに，$\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ の既約元全体の集合は

$$\mathrm{Irr}(\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})) = \{\lambda x_i \mid 1 \leq i \leq n,\ \lambda \in K^\times\} \ \cup \ \left\{ \frac{P}{M(P)} \ \middle|\ \begin{array}{l} P \in R \setminus \bigcup_{i=1}^{n} K^\times x_i, \\ P \text{ は既約} \end{array} \right\} \tag{3.3}$$

で与えられる。

証明. まずいくつかの主張を示す。

主張 1. $\frac{P}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}$ $(P \in S(\mathbf{a}))$ が可逆であることと，$P \in K^\times$ は同値である

主張 1 の証明. $\frac{P}{x^{\mathbf{a}}} \in \mathcal{A}(Q, \mathbf{x})^\times = K^\times$ と仮定すると，$P = cx^{\mathbf{a}}$ を満たす $c \in K^\times$ が存在する。従って，もし $a_i \neq 0$ である i が存在するならば，$x_i \mid P$ となるがこれは $P \in S(\mathbf{a})$ に矛盾する。よって $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ であり，$P \in K^\times$ を得る。

逆に関しては，$P \in K^\times$ とすると，$\frac{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}{P} \in \mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ よりすぐに分かる。 □

主張 2. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$ とする。$\mathbf{x}^{\mathbf{b}} \in S(\mathbf{a})$ のとき，$\mathbf{a} = \mathbf{0}$ である。

主張 2 の証明. $a_i \neq 0$ を満たす i が存在すると仮定して矛盾を導く。$S(\mathbf{a})$ の定義と $\mathbf{x}^{\mathbf{b}} \in S(\mathbf{a})$ より，x_i は $\mathbf{x}^{\mathbf{b}}$ を割らない。よって $b_i = 0$ である。一方，$\mathbf{x}^{\mathbf{b}} \in S(\mathbf{a})$ より $\mathbf{x}^{\mathbf{b}} \in I_i^{a_i} \subseteq I_i$ が従う。この事実と補題 3.7 より，任意の $j \neq i$ に対して $b_i > 0$ となる。これは $b_i = 0$ に矛盾する。よって任意の i に関して $a_i = 0$ となるため，$\mathbf{a} = \mathbf{0}$ である。 □

主張 3. $x_i Q \in S(\mathbf{a})$ のとき，$Q \in S(\mathbf{a})$ となる。

主張 3 の証明. $S(\mathbf{a})$ の定義から $a_i = 0$ である。$x_iQ \in I_j^{a_j}$ と補題 3.8 より $x_i \in I_j^{b_j}$ かつ $Q \in I_j^{a_j-b_j}$ を満たす $0 \leqq b_j \leqq a_j$ が存在する。$j \neq i$ のとき，$b_j \neq 0$ とすると，$x_i \in I_j$ となり矛盾するので，任意の $j \neq i$ に関して，$b_j = 0$。よって，$Q \in I_j^{a_j}$ である。従って，$Q \in S(\mathbf{a})$ である（$j \neq i$ のとき，$x_j \mid Q \Leftrightarrow x_j \mid x_iQ$）。 □

主張 4. $P \in S(\mathbf{a})$ を既約多項式で，$P \neq \lambda x_i$ $(\forall i = 1, 2, \ldots, n, \forall \lambda \in K^\times)$ とする。任意の $\mathbf{a}' > \mathbf{a}$ に対して $P \notin S(\mathbf{a}')$ が成り立つことと，$\mathbf{a} = \mathbf{m}(P)$ が成り立つことは同値である。

主張 4 の証明. 任意の $\mathbf{a}' > \mathbf{a}$ に対して $P \notin S(\mathbf{a}')$ が成り立つことを仮定する。ここで，

$$\mathbf{a}' = (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i + 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

とおく。$x_i \nmid P (1 \leqq \forall i \leqq n)$ より，$P \notin S(\mathbf{a}')$ である。よって，$P \notin I_i^{a_i+1}$ が従う。一方，$P \in I_i^{a_i}$ であるから，$P \in I_i^{a_i} \setminus I_i^{a_i+1}$ が成り立つ。$m_i(P)$ の定義より，$a_i = m_i(P)$ である。

逆に，$\mathbf{a} = \mathbf{m}(P)$ と仮定する。$\mathbf{a}' > \mathbf{a}$ かつ $P \in S(\mathbf{a}')$ となる $\mathbf{a}'$ が存在すると仮定する。$a_i' > a_i$ のとき，$a_i = m_i(P)$ なので，$a_i' \geqq m_i(P) + 1$ である。従って，$P \in I_i^{a_i'} \subseteq I_i^{m_i(P)+1}$ となる。これは $m_i(P)$ の取り方に矛盾する。以上より逆が示された。 □

では証明の本題に入る。初めに，$\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ から既約元 $\frac{P}{\mathbf{x}^\mathbf{a}}$ $(P \in S(\mathbf{a}))$ をとり，これが式 (3.3) の右辺の集合に入ることを示す。まず，P が既約でないと仮定して矛盾を導く。以下の 2 つの場合を考える。

(1) $P = x_iQ$ を満たす i と $Q \in R$ が存在する。

(2) P は任意の i において，x_i で割り切れない。

(1) の場合，主張 3 から $Q \in S(\mathbf{a})$ である。P が可約なので $Q \in R \setminus K^\times$ であり，主張 1 から $\frac{Q}{\mathbf{x}^\mathbf{a}} \notin K^\times$ が従うので，$\frac{P}{\mathbf{x}^\mathbf{a}}$ は 2 つの可逆ではない元 $\frac{Q}{\mathbf{x}^\mathbf{a}}, x_i$ の積である。これは，$\frac{P}{\mathbf{x}^\mathbf{a}} \in \mathrm{Irr}(\mathcal{A}(Q, \mathbf{x}))$ に矛盾する。

次に (2) について議論する。P が既約ではないので，$P = FG$ を満たす，$R \setminus K^\times$ の元 F, G が存在する。このとき，$F \in S(\mathbf{b}), G \in S(\mathbf{c})$ $(\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a})$ である $\mathbb{N}^n$ の元 $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ が存在する。実際，補題 3.8 より，$F \in I_i^{b_i}, G \in I_i^{c_i}$ を満たす $0 \leqq b_i \leqq a_i$ が存在する（$b_i + c_i = a_i$）。従って，$\mathbf{b} \coloneqq (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $\mathbf{c} \coloneqq (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ とおけば，(2) の条件より，任意の i に関して $x_i \nmid F, G$ を満たすので，$F \in S(\mathbf{b}), G \in S(\mathbf{c})$ を得る。よって

$$\frac{P}{\mathbf{x}^\mathbf{a}} = \frac{F}{\mathbf{x}^\mathbf{b}} \cdot \frac{G}{\mathbf{x}^\mathbf{c}} \quad (F \in S(\mathbf{b}), G \in S(\mathbf{c}))$$

と書けるが，$F, G \in R \setminus K^\times$ なので，主張 1 より，$\frac{P}{\mathbf{x}^\mathbf{a}}$ は 2 つの可逆ではない $\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ の元の積となる。

以上より，P が可約であると仮定すると，(1), (2) のいずれの場合も $\frac{P}{\mathbf{x}^\mathbf{a}}$ は既約にはならず，$\frac{P}{\mathbf{x}^\mathbf{a}}$ の取り方に矛盾する。よって P は既約である。

$P = \lambda x_i$ $(\lambda \in K^\times)$ のとき，主張 2 より $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ となるので，$\frac{P}{\mathbf{x}^\mathbf{a}}$ は式 (3.3) の右辺の集合に含まれる。次に $P \neq \lambda x_i$ $(\forall i = 1, 2, \ldots, n, \forall \lambda \in K^\times)$ のとき，$\mathbf{x}^\mathbf{a} = M(P)$ を示す。上の議論より，P は

R 上で既約である。また，任意の $\mathbf{a}' > \mathbf{a}$ を満たす $\mathbf{a}'$ に関して $P \notin S(\mathbf{a}')$ である。実際，$P \in S(\mathbf{a}')$ である $\mathbf{a}' > \mathbf{a}$ が存在すると仮定すると，

$$\frac{P}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}} = \frac{P}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}'}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{a}'-\mathbf{a}}$$

を得る。今，P は可逆でなく，$\mathbf{a}' - \mathbf{a} > \mathbf{0}$ なので，$\frac{P}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}'}}, \mathbf{x}^{\mathbf{a}'-\mathbf{a}}$ のいずれも可逆ではない。これは $\frac{P}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}$ の既約性に矛盾。従って，主張 2 より $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = M(P)$ となるため，$\frac{P}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}} = \frac{P}{M(P)}$ が導かれる。

以上の議論から，$\mathrm{Irr}(\mathcal{A}(Q, \mathbf{x}))$ は式 (3.3) の右辺の集合に含まれることが示された。

ここから逆の包含を示す。まず定理 3.1 より任意の初期クラスター変数は既約元である。従って，あとは $\frac{P}{M(P)}$ (P : 既約元) が可逆でないとして，既約であることを示せば良い。今，P は既約元で，かつ $P \neq \lambda x_i$ ($\forall i = 1, 2, \ldots, n, \forall \lambda \in K^{\times}$) なので，任意の i に関して $x_i \mid P$ である。よって，$\mathbf{a} = \mathbf{m}(P)$ とすると，$P \in S(\mathbf{a})$ を満たす。この上で，

$$\frac{P}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}} = \frac{F}{\mathbf{x}^{\mathbf{b}}} \cdot \frac{G}{\mathbf{x}^{\mathbf{c}}} \quad (F \in S(\mathbf{b}), G \in S(\mathbf{c}))$$

と表されたとする。$F = \mathbf{x}^{\mathbf{d}} F', G = \mathbf{x}^{\mathbf{e}} G'$ (F', G'はどの x_i でも割り切れない) と表すと，

$$\frac{P}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}} = \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{d}} F'}{\mathbf{x}^{\mathbf{b}}} \cdot \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{e}} G'}{\mathbf{x}^{\mathbf{c}}}$$

になり，両辺の分母を払うと，$\mathbf{x}^{\mathbf{b}+\mathbf{c}} P = \mathbf{x}^{\mathbf{a}+\mathbf{d}+\mathbf{e}} F' G'$ となる。R は UFD なので，$\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{d} + \mathbf{e}, P = F' G'$ を得る。P は既約なので，$F' \in K^{\times}$ もしくは $G' \in K^{\times}$ である。$F' \in K^{\times}$ とする。このとき，$\mathbf{x}^{\mathbf{d}} = F'^{-1} F \in S(\mathbf{b})$ が成り立つので，主張 2 より，$\mathbf{b} = \mathbf{0}$ となる。一方で主張 3 より，$G' \in S(\mathbf{c})$ となり，$\mathbf{a} = \mathbf{m}(P) = \mathbf{m}(G') \geqq \mathbf{c}$ を得る。以上のことより，$\mathbf{d} = \mathbf{e} = \mathbf{0}$ となり，$\frac{F}{\mathbf{x}^{\mathbf{b}}} = F'$ は可逆である。$G' \in K^{\times}$ の場合も同様に，$\frac{G}{\mathbf{x}^{\mathbf{c}}}$ は可逆となる。よって，$\frac{P}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}$ は $\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ の既約元となる。

最後に UFD 性について述べる（$\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ のネーター性により既約分解の存在が従う）。$\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ の元の 2 通りの既約分解

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \cdot \frac{P_1}{M(P_1)} \cdot \frac{P_2}{M(P_2)} \cdots \cdot \frac{P_r}{M(P_r)} = \mathbf{x}^{\mathbf{b}} \cdot \frac{Q_1}{M(Q_1)} \cdot \frac{Q_2}{M(Q_2)} \cdots \cdot \frac{Q_s}{M(Q_s)}$$

(P_i, Q_jは既約多項式で，どの x_k でも割り切れない)

を考える。両辺の分母を払って R の UFD 性を使えば，$\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ における既約分解の一意性が分かる。以上で題意は示された。 □

この定理より，条件 3.12 が成り立つ場合，クラスター代数は UFD となる。A_n 型（$n \neq 3$），E_n 型（$n = 6, 7, 8$）のディンキンクイバーについて条件 3.12 を確かめることで，以下の結果を得る。

系 3.16 ([10, Section 4])**.** ディンキンクイバーに対するクラスター代数の UFD 性は以下のようになる。

ディンキン型	UFD	not UFD
A 型	A_n ($n \neq 3$)	A_3
D 型	—	D_n ($n \geqq 4$)
E 型	E_n ($n = 6, 7, 8$)	—

注意 3.17. [10] の結果は [7] において更に拡張されている。そこでは，クラスター代数が Krull 環であることが示され，その因子類群の階数が決定されている。

3.2 節　クラスター代数のネーター正規化

この節では，A_n 型ディンキンクイバーに付随するクラスター代数のネーター正規化を明示的に与え，それを用いて A_n 型のクラスター代数の Krull 次元を決定する。

例 1.8 と例 2.25 より，A_2 型，A_3 型クイバーに付随するクラスター代数のネーター正規化は以下のように与えられている。

$$K[x_1 - x_1', x_2 - x_2'] \subseteq \mathcal{A}(A_2)$$
$$K[x_1 - x_1', x_2 - x_2', x_3 - x_3'] \subseteq \mathcal{A}(A_3)$$

この結果は一般の A_n 型に対して以下のように自然に拡張される。

定理 3.18. A_n 型のディンキン図形に関するクラスター代数 $\mathcal{A}(A_n)$ の部分代数

$$K[x_1 - x_1', x_2 - x_2', \ldots . x_n - x_n']$$

は, $\mathcal{A}(A_n)$ のネーター正規化である。ここで，$x_i' = \mu_i(\mathbf{x})_i = x_i^{-1} f_i$ である。

まずは $x_1 - x_1', x_2 - x_2', \ldots, x_n - x_n'$ の代数独立性を示す。

補題 3.19. A_n 型のディンキンクイバーに付随するクラスター代数 $\mathcal{A}(A_n)$ において，

$$x_1 - x_1', x_2 - x_2', \ldots, x_n - x_n'$$

は K 上代数的に独立である。

証明. K が標数 0 の体の場合で考えれば良い。定義より x_i' は以下のように書ける。

$$x_i' = \frac{f_i}{x_i} = \begin{cases} \dfrac{x_2 + 1}{x_1} & (i = 1) \\ \dfrac{x_{i-1} + x_{i+1}}{x_i} & (1 < i < n) \\ \dfrac{x_{n-1} + 1}{x_n} & (i = n) \end{cases}$$

ここで，各 $x_i - x_i'$ を g_i とおく。このとき，$g_1, \ldots, g_n$ のヤコビ行列は以下のようになる。

$$J_{g_1,\ldots,g_n} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{f_1}{x_1^2} & -\frac{1}{x_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{x_2} & 1 + \frac{f_2}{x_2^2} & -\frac{1}{x_2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_3} & 1 + \frac{f_3}{x_3^2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 + \frac{f_{n-1}}{x_{n-1}^2} & -\frac{1}{x_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{x_n} & 1 + \frac{f_n}{x_n^2} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

このヤコビアン

$$\det(J_{g_1,\dots,g_n}) = \frac{1}{x_1\cdots x_n}\cdot\det\begin{pmatrix} x_1+\frac{f_1}{x_1} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & x_2+\frac{f_2}{x_2} & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x_3+\frac{f_3}{x_3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1}+\frac{f_{n-1}}{x_{n-1}} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x_n+\frac{f_n}{x_n} \end{pmatrix}$$

において，右辺を行列式の定義を用いて計算すると，

$$\det(J_{g_1,\dots,g_n}) = \frac{1}{x_1\cdots x_n}\cdot\{(x_1\cdots x_n) + (n-1\ \text{次以下のローラン多項式})\} \neq 0$$

となる[1]。よって，ヤコビアン判定法 [9, 1, Theorem III, p. 135] より $g_1,\dots,g_n$ は K 上代数的に独立である。 □

定理 3.18 の証明. 以下，拡大の有限性を示す。定理 2.23(1) より，

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(A_n) \cong \mathcal{A}' &:= K[X_1,X_2,\dots,X_n,Y_1,Y_2,\dots,Y_n]/I \\ &= K[x_1,x_2,\dots,x_n,y_1,y_2,\dots,y_n]\end{aligned}$$

である。ただし，$I = (X_iY_i - f_i \mid i = 1,2,\dots,n)$ であり，f_i は

$$f_i \coloneqq \begin{cases} 1+X_2 & (i=1) \\ X_{i-2}+X_{i+1} & (i=2,3,\dots,n-1) \\ 1+X_{n-1} & (i=n) \end{cases}$$

である。従って，$\mathcal{A}'$ が $K[x_1-y_1,x_2-y_2,\dots,x_n-y_n]$ 上整であることを示せば良い。ここで，

$$\begin{aligned} x_1y_1 - x_2 - 1 &= 0 \\ x_iy_i - x_{i-1} - x_{i+1} &= 0 \quad (i=2,3,\dots,n-1) \\ x_ny_n - x_{n-1} - 1 &= 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

が成り立つことに注意しておく。

$\mathcal{A}'$ の元 $x_j^{(i)}$ $(0 \leqq i,j \leqq n)$, $y_j^{(i)}$ $(0 \leqq i < j \leqq n)$ を次で定義する。

$$x_j^{(i)} \coloneqq \begin{cases} x_j & (i=0) \\ x_j^{(i-1)} - y_j^{(i-1)} & (i=j) \\ x_j^{(i-1)} & (i\neq j) \end{cases}$$

$$y_j^{(i)} \coloneqq \begin{cases} y_j & (i=0) \\ y_j^{(i-1)} & (i<j) \end{cases}$$

[1]三重対角行列の行列式の再帰公式

$$\det(J_{g_1,\dots,g_n}) = \left(x_n + \frac{f_n}{x_n}\right)\det(J_{g_1,\dots,g_{n-1}}) - \det(J_{g_1,\dots,g_{n-2}})$$

を用いても分かる。

定義から，

$$x_j^{(i)} = \begin{cases} x_j - y_j & (j \leqq i) \\ x_j & (i < j) \end{cases}$$
$$y_j^{(i)} = y_j \quad (i < j)$$

を得る。

ここで，$i \geqq 0$ に対して，次の 2 つの主張 (A_i), (B_i) を考える。

(A_i) 多項式

$$F = \left(Y_{i+1}^{(i)}\right)^{2^{i+1}} + \sum_{j=1}^{2^{i+1}} F_j^{(i)} \cdot \left(Y_{i+1}^{(i)}\right)^{2^{i+1}-j}$$
$$F_j^{(i)} \in K[X_1^{(i+1)}, \dots, X_n^{(i+1)}], \quad \deg F_j^{(i)} \leqq j$$

が存在して，

$$F\left(x_1^{(i+1)}, \dots, x_n^{(i+1)}, y_{i+1}^{(i)}\right) = 0$$

を満たす。

(B_i) 多項式

$$G = \left(X_{i+1}^{(i)} Y_{i+1}^{(i)}\right)^{2^i} + \sum_{j=1}^{2^i} G_j^{(i)} \cdot (Y_{i+1}^{(i)})^{2^i - j}$$
$$G_j^{(i)} \in K[X_1^{(i)}, \dots, X_n^{(i)}], \quad \deg G_j^{(i)} \leqq 2^i$$

が存在して，

$$G\left(x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}, y_{i+1}^{(i)}\right) = 0$$

を満たす。

全ての i に対して，(A_i) が成り立つことが示されたとする。このとき (A_i) より，$y_{i+1}^{(i)}$ が $K[x_1^{(i+1)}, \dots, x_n^{(i+1)}]$ 上整となる。

- (A_0) より，$y_1^{(0)} = y_1$ が $K[x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}] = K[x_1 - y_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$ 上整なので，$\mathcal{A}'$ は $K[x_1 - y_1, x_2, x_3, \dots, x_n, y_2, \dots, y_n]$ 上整であることが従う。
- (A_1) より，$y_2^{(1)} = y_2$ が $K[x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}] = K[x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3, \dots x_n]$ 上整なので，$\mathcal{A}'$ は $K[x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3, \dots, x_n, y_3, \dots, y_n]$ 上整であることが従う。
- (A_2) より，$y_3^{(2)} = y_3$ が $K[x_1^{(3)}, \dots, x_n^{(3)}] = K[x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, x_4, \dots x_n]$ 上整なので，$\mathcal{A}'$ は $K[x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, x_4, \dots, x_n, y_4, \dots, y_n]$ 上整であることが従う。
- これを繰り返すと，$\mathcal{A}'$ は $K[x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, \dots, x_n - y_n]$ 上整であることが従う。

任意の i について，(A_i) が成り立つことを以下の 3 つの主張に分けて証明する。

(0) (B_0)

(1) $(B_i) \Longrightarrow (A_i)$

(2) $(A_i) \Longrightarrow (B_{i+1})$

(0) $i=0$ のとき，(3.5) より $G = X_1^{(0)}Y_1^{(0)} - X_2^{(0)} - 1$ と取れば (B_0) は成り立つ。

(1) (B_i) のような

$$G = \left(X_{i+1}^{(i)}Y_{i+1}^{(i)}\right)^{2^i} + \sum_{j=1}^{2^i} G_j^{(i)} \cdot (Y_{i+1}^{(i)})^{2^i-j}$$

が存在し，

$$\left(x_{i+1}^{(i)}y_{i+1}^{(i)}\right)^{2^i} + \sum_{j=1}^{2^i} G_j^{(i)}(x_1^{(i)},\dots,x_n^{(i)})(y_{i+1}^{(i)})^{2^i-j} = 0$$

と仮定する。$x_{i+1}^{(i+1)} = x_{i+1}^{(i)} - y_{i+1}^{(i)}$, $x_j^{(i+1)} = x_j^{(i)}$ $(j \neq i)$ を用いると，

$$((x_{i+1}^{(i+1)}+y_{i+1}^{(i)})y_{i+1}^{(i)})^{2^i}+\sum_{j=1}^{2^i} G_j^{(i)}(x_1^{(i+1)},\dots,x_i^{(i+1)},x_{i+1}^{(i+1)}+y_{i+1}^{(i)},x_{i+2}^{(i+1)},\dots,x_n^{(i+1)})\,(y_{i+1}^{(i)})^{2^i-j} = 0$$

となる。各項の $(y_{i+1}^{(i)})^{2^{i+1}-j}$ の係数に現れる項を見る：

- 第 1 項目に現れる項は，二項定理により

$$(x_{i+1}^{(i+1)})^{2^i-l}(y_{i+1}^{(i)})^l(y_{i+1}^{(i)})^{2^i} = (x_{i+1}^{(i+1)})^{2^i-l}(y_{i+1}^{(i)})^{2^i+l} \qquad (0 \leqq l \leqq 2^i)$$

  の形で表される（定数係数は無視する）。$2^i + l = 2^{i+1} - j$ のとき，$l = 2^i - j$ であるから，$(y_{i+1}^{(i)})^{2^{i+1}-j}$ の係数は $(x_{i+1}^{(i+1)})^j$ である。
- $G_l^{(i)}(x_1^{(i+1)},\dots,x_i^{(i+1)},x_{i+1}^{(i+1)} + y_{i+1}^{(i)},x_{i+2}^{(i+1)},\dots,x_n^{(i+1)})(y_{i+1}^{(i)})^{2^i-l}$ に現れる項は

$$\begin{aligned}&(x_1^{(i+1)})^{k_1}\cdots(x_i^{(i+1)})^{k_i}(x_{i+1}^{(i+1)})^{k_{i+1}-t}(y_{i+1}^{(i)})^t(x_{i+2}^{(i+1)})^{k_{i+2}}\cdots(x_n^{(i+1)})^{k_n}(y_{i+1}^{(i)})^{2^i-l}\\ &\qquad = (x_1^{(i+1)})^{k_1}\cdots(x_i^{(i+1)})^{k_i}(x_{i+1}^{(i+1)})^{k_{i+1}-t}(x_{i+2}^{(i+1)})^{k_{i+2}}\cdots(x_n^{(i+1)})^{k_n}(y_{i+1}^{(i)})^{2^i-l+t}\\ &(k_1+k_2+\cdots+k_n = 2^i, \quad 0 \leqq t \leqq k_{i+1})\end{aligned}$$

  となる。$2^i - l + t = 2^{i+1} - j$ のとき，$t = 2^i - j + l$ となる。$(y_{i+1}^{(i)})^{2^{i+1}-j}$ の係数に現れる $x_j^{(i+1)}$ の個数は

$$k_1 + \cdots + k_n - t = 2^i - 2^i + j - l = j - l \leqq j$$

  である。

従って，(A_i) の条件を満たすような多項式 F が存在する。

(2) 次に (A_i) から (B_{i+1}) が導かれることを示す。$i+2=n$ の場合も同様なので，$i+2 \leqq n$ の場合を示す。

(A_i) のような

$$F = \left(Y_{i+1}^{(i)}\right)^{2^{i+1}} + \sum_{j=1}^{2^{i+1}} F_j^{(i)} \cdot \left(Y_{i+1}^{(i)}\right)^{2^{i+1}-j}$$

が存在し，

$$\left(y_{i+1}^{(i)}\right)^{2^{i+1}} + \sum_{j=1}^{2^{i+1}} F_j^{(i)}(x_1^{(i+1)}, \ldots, x_n^{(i+1)}) \cdot \left(y_{i+1}^{(i)}\right)^{2^{i+1}-j} = 0$$

と仮定する。(3.5) から，

$$x_{i+2}^{(i+1)} y_{i+2}^{(i+1)} - (x_{i+1}^{(i+1)} + y_{i+1}^{(i)}) - x_{i+3}^{(i+1)} = 0$$

となるので，

$$y_{i+1}^{(i)} = x_{i+2}^{(i+1)} y_{i+2}^{(i+1)} - x_{i+1}^{(i+1)} - x_{i+3}^{(i+1)}$$

を得る。これを代入して，

$$(x_{i+2}^{(i+1)} y_{i+2}^{(i+1)} - x_{i+1}^{(i+1)} - x_{i+3}^{(i+1)})^{2^{i+1}} + \sum_{j=0}^{2^{i+1}} f_j^{(i)} (x_{i+2}^{(i+1)} y_{i+2}^{(i+1)} - x_{i+1}^{(i+1)} - x_{i+3}^{(i+1)})^{2^{i+1}-j} = 0$$

を得る（ここで，$F_j^{(i)}(x_1^{(i+1)}, \ldots, x_n^{(i+1)}) = f_j^{(i)}$ としている）。この各項において $(y_{i+2}^{(i+1)})^{2^{i+1}-j}$ の係数に現れる項を見る：

- 第 1 項目に現れる項を展開すると，

$$(x_{i+2}^{(i+1)})^{k_1} (y_{i+2}^{(i+1)})^{k_1} (x_{i+1}^{(i+1)})^{k_2} (x_{i+3}^{(i+1)})^{k_3} = (x_{i+2}^{(i+1)})^{k_1} (x_{i+1}^{(i+1)})^{k_2} (x_{i+3}^{(i+1)})^{k_3} (y_{i+2}^{(i+1)})^{k_1}$$
$$(k_1 + k_2 + k_3 = 2^{i+1})$$

  という形で表されることが分かる（定数係数は無視する）。$k_1 = 2^{i+1} - j$ のとき，$(y_{i+2}^{(i+1)})^{2^{i+1}-j}$ の係数に現れる項に，$x_j^{(i+1)}$ は $k_1 + k_2 + k_3 = 2^{i+1}$ 個現れる。

- 次に，第 l 項目に現れる式：$f_l^{(i)} \cdot (x_{i+2}^{(i+1)} y_{i+2}^{(i+1)} - x_{i+1}^{(i+1)} - x_{i+3}^{(i+1)})^{2^{i+1}-l}$ を考える。上と同様の議論により，$(x_{i+2}^{(i+1)} y_{i+2}^{(i+1)} - x_{i+1}^{(i+1)} - x_{i+3}^{(i+1)})^{2^{i+1}-l}$ において $(y_{i+2}^{i+1})^k$ の係数に現れる項には $x_j^{(i+1)}$ が $(2^{i+1} - l)$ 個現れる。また，$f_l^{(i)}$ の項には $x_j^{(i+1)}$ には高々l 個現れる。以上の議論より，$(y_{i+2}^{(i+1)})^{2^{i+1}-j}$ の係数に現れる項には，$x_j^{(i+1)}$ が高々$(2^{i+1} - l) + l = 2^{i+1}$ 個現れる。

従って，(B_{i+1}) の条件を満たすような多項式 G が存在する。

よって定理の主張が証明された。 □

この定理から以下の系が従う。

系 3.20. A_n 型のディンキンクイバーに付随するクラスター代数 $\mathcal{A}(A_n)$ の *Krull* 次元は以下のようになる。

$$\dim(\mathcal{A}(A_n)) = \begin{cases} n & (K \text{ が標数 } 0 \text{ の体}) \\ n+1 & (K = \mathbb{Z}) \end{cases}$$

証明. 系 1.4, 1.7 と定理 3.18 より従う。 □

以下の予想を立てて本稿を終了する。

予想 3.21. ディンキンクイバーに付随するクラスター代数のネーター正規化は

$$K[x_1 - x_1', x_2 - x_2', \dots . x_n - x_n']$$

で与えられる。

A_n 型以外の場合に障害となるのは，次数 3 の頂点 i における交換多項式 f_i であり，f_i の次数が 2 となるので，A_n 型の証明をそのまま適用することができない。しかし上の証明を適切に修正することで一般のディンキンクイバーに対して予想 3.21 を証明することができると考えられる。

第 4 章

結論

本稿では，ディンキンクイバーに付随するクラスター代数の UFD 性について，Lampe [10] の結果を紹介し，さらに A_n 型ディンキンクイバーに付随するクラスター代数のネーター正規化を与えた。いずれの結果も，クラスター代数の可換環論的な研究において基本的なものである。

今後の研究を出発点とし，今後はさらに深く可換環論的な性質の考察およびそのクラスター構造との関係性を調べていきたい。例えば本研究の自然な拡張として，今回扱った Krull 次元のみならず，深度や余次元などの可換環論的な諸不変量を決定することが考えられる。これにより，クラスター代数の可換環論的性質のうち，これまで十分に明らかにされていなかった部分を明確にすることが可能となる。さらに，Cohen-Macaulay 性や Gorenstein 性といった可換環論において基本的な性質を持つか調べていきたい。特に，これらがクラスター構造とどのように関連があるかを考えることは今後の重要な課題である。表現論や代数幾何学においても重要な概念であるため，クラスター代数の Cohen-Macaulay 性を調べることは，今後の研究課題の一つである。

これらの研究は，本稿で得られた結果を基礎として，クラスター代数の可換環論的性質をさらに体系的に解明することにつながると考えられる。従って本稿で得られた結果は，クラスター代数を可換環として理解するための具体例を与えるものであり，今後の可換環論的研究に向けた出発点となることが期待される。

参考文献

[1] A. Berenstein, S. Fomin, and A. Zelevinsky, *Cluster algebras III: Upper bounds and double Bruhat cells*, Duke Math. J. **126** (2005), 1–52.

[2] J.H. Conway and H.S.M. Coxeter, *Triangulated polygons and frieze patterns*, Math. Gaz.,Vol. 57 **400** (1973), 87–94.

[3] J.H. Conway and H.S.M. Coxeter, *Triangulated polygons and frieze patterns*, Math. Gaz.,Vol. 57 **401** (1973), 175–183.

[4] H.S.M. Coxeter, *Frieze patterns*, Acta Arith. **18** (1971), 297–310.

[5] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras I: Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 497–529.

[6] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras II: Finite type classification*, J. Amer. Math. Soc. **154** (2003), 63–121.

[7] A. García-Elsener, P. Lampe, and D. Smertnig, *Factoriality and class groups of cluster algebras*, Advances in Math. **358** (2019), 106858.

[8] C. Geiss, B. Leclerc, and J. Schröer, *Factorial cluster algebras*, Doc. Math. **18** (2013), 249– 274.

[9] W. Hodge and D. Pedoe, *Methods of Algebraic Geometry*, Cambridge University Press (1953).

[10] P. Lampe, *Acyclic cluster algebras from a ring-theoretic point of view*, arXiv:1210.1502(2012).

[11] 井上 玲（述）, 神保 道夫（記）, クラスター代数入門, 立教大学数理物理学研究センター, Lecture Notes Volume 3 (2016)

[12] 木内 陽介, ネーター正規化定理の拡張とその応用, 徳島大学数理科学教室, 数理科学研究 vol. 29. (2024)

[13] 永田 雅宜, 可換環論, 紀伊国屋数学叢書. (1974)

[14] 中西 知樹, 団代数論の基礎, 東京大学出版社. (2024)

[15] 西山 享, フリーズの数学 - スケッチ帖, 共立出版. (2022)

[16] 堀田 良之, 可換環と体, 岩波書店. (2006)

Studies of the Commutative Algebraic Properties of Cluster Algebras

Yosuke KIUCHI

Mathematical Sciences

Division of Science and Technology

Graduate School of Science and Technology for Innovation

Tokushima University

Abstract

In this paper, we first present an extension of the Noether normalization theorem from finitely generated algebras over fields to finitely generated integral domain extensions over integral domains. We also review the basic structure of cluster algebras defined by quivers and mutations, together with fundamental results such as the Laurent phenomenon. Next, we investigate some commutative algebraic properties for cluster algebras associated with Dynkin quiver, focusing on UFD property and Noether normalization. In this direction we present criteria for UFD property and determine these for each Dynkin type due to Lampe. Finally, we construct Noether normalizations for cluster algebras of type A_n by using the elements $x_i - x_i'$ and compute their Krull dimensions explicitly.