代数構造特論

松井紘樹

目次

約束事

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ でそれぞれ自然数，整数，有理数，実数，複素数全体の集合を表す．また，自然数には 0 を含めることにする：$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- 集合 A に対して $\#A$ で A の元の個数を表す.

1　可換環についての復習

この節では可換環について基本的なことを復習する.

1.1　アーベル群

まずは環および加群の理論の基礎となるアーベル群とその準同型写像について定義のみ簡単に復習しておく.

定義 1.1. 集合 M に加法

$$M \times M \to M,\ (a, b) \mapsto a + b$$

が与えられていて以下の条件を満たすとき, M は**アーベル群（abelian group）**または**加法群（additive group）**であるという：

(i)（加法の結合性）
　任意の $a, b, c \in M$ に対して $(a + b) + c = a + (b + c)$.

(ii)（加法単位元（=**零元**）の存在）
　ある $0_M \in M$ で，任意の $a \in M$ に対して $a + 0_M = 0_M + a = a$ を満たすものが存在する.

(iii)（加法逆元の存在）
　任意の $a \in M$ に対して，ある $-a \in M$ で $a + (-a) = (-a) + a = 0_M$ を満たすものが存在する.

(iv)（加法の可換性）
　任意の $a, b \in M$ に対して $a + b = b + a$.

零元 0_M の添字 M は省略することが多い.

定義 1.2. M, N をアーベル群とする.

(1) 写像 $f : M \to N$ が条件

$$\text{任意の } x, y \in M \text{ に対して } f(x + y) = f(x) + f(y)$$

を満たすとき，f を（アーベル群の）**準同型写像（homomorphism）**という.

(2) 写像 $f : M \to N$ が条件

(i) f は準同型写像.

(ii) ある準同型写像 $g : N \to M$ が存在して，$g \circ f = \mathrm{id}_M$, $f \circ g = \mathrm{id}_N$ が成り立つ.

を満たすとき，f を（アーベル群の）**同型写像（isomorphism）**という.
以下が成り立つことは容易に分かる：

$$f \text{ が同型} \iff f \text{ は準同型かつ全単射}$$

1.2 環とイデアル

定義 1.3. 集合 R に加法と乗法

$$R \times R \to R,\ (a,b) \mapsto a+b$$
$$R \times R \to R,\ (a,b) \mapsto ab$$

が与えられていて以下の条件を満たすとき，R は**環（ring）**であるという：

(i) R は加法に関してアーベル群となる.

(ii)（乗法の結合性）
任意の $a,b,c \in R$ に対して $(ab)c = a(bc)$.

(iii)（分配法則）
任意の $a,b,c \in R$ に対して $a(b+c) = ab+ac$, $(a+b)c = ac+bc$.

(iv)（乗法単位元（=**単位元**）の存在）
ある $1_R \in R$ で，任意の $a \in R$ に対して $1_R a = a 1_R = a$ を満たすものが存在する.

さらに次の条件を満たすとき，R は**可換環（commutative ring）**であるという：

(v)（乗法の可換性）
任意の $a,b \in R$ に対して $ab = ba$.

単位元 1_R の添字 R は省略することが多い.

注意. 環 R の任意の元 a に対して，分配法則より

$$a \cdot 0 = a(0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$$

となり，$a \cdot 0 = 0$ が従う.
従って $1 = 0$ のとき，任意の $a \in R$ に対して $a = a1 = a0 = 0$ となるので，$R = \{0\}$ が成り立つ．このとき，R は**零環（zero ring）**と呼ばれる.

例 1.4. (1) 整数の集合 $\mathbb{Z}$，有理数の集合 $\mathbb{Q}$，実数の集合 $\mathbb{R}$，複素数の集合 $\mathbb{C}$ は通常の加法，乗法で可換環となる．

(2) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を変数とし，実数を係数とする多項式の集合 $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ は多項式の加法，乗法で可換環となる．同様に，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を変数とし，複素数を係数とする多項式の集合 $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ は多項式の加法，乗法で可換環となる．

(3) 実数を成分に持つ n 次正方行列の集合 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ や複素数を成分に持つ n 次正方行列の集合 $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ は行列の加法，乗法で環となる．$n \geq 2$ かつ R が零環でないとき，これらは可換環ではない．

この講義では，特に断らない限り**環と言ったら零環でない（$1 \neq 0$）可換環を意味することにする**．

定義 1.5. (1) R を環とする．R の元 a が**可逆元（invertible element）**であるとは，$ab = 1$ となるような b が存在するときに言う．このとき b を a **の逆元**といい，a^{-1} と表す．

(2) 環 R が**体（field）**であるとは，R の任意の 0 でない元が可逆元であるときにいう．

(3) 環 R が**整域（integral domain）**であるとは，「R の任意の 0 でない元 a, b に対して $ab = 0 \Longrightarrow a = 0 \text{ or } b = 0$ 」が成り立つときにいう．

例 1.6. (1) 体 $\Rightarrow$ 整域 $\Rightarrow$ 環

(2) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ は体であり，$\mathbb{Z}$ は体でない整域である．

(3) $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n], \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ は整域である．

定義 1.7. R を環とする．R の部分集合 S が条件：

(i) $1 \in S$

(ii) 任意の $a, b \in S$ に対して $a - b \in S$.

(iii) 任意の $a, b \in S$ に対して $ab \in S$.

を満たすとき，S **を** R **の部分環（subring）**という．
このとき，S は R と同じ加法，乗法で環となる．

例 1.8. (1) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$：部分環

(2) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{m + n\sqrt{-5} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{C}$ の部分環となる．

(3) $2\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の部分環ではない（(ii)(iii) を満たすが (i) は満たさない）．

定義 1.9. R を環とする．R の部分集合 I が条件：

(i) $0 \in I$

(ii) 任意の $a, b \in I$ に対して $a + b \in I$.

(iii) 任意の $a \in R$, $b \in I$ に対して $ab \in I$.

を満たすとき，I **を** R **のイデアル（ideal）**という．

注意. (iii) より任意の $a \in I$ に対して $-a = (-1)a \in I$ となるので，(i)(ii) と合わせればイデアル I は R の（アーベル群としての）部分群である．

例 1.10. (1) $\{0\}, R$ は R のイデアルとなる．これらを**自明なイデアル**という．

(2) R の部分集合 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，R の部分集合

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} Rx_\lambda := \left\{ \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda x_\lambda \;\middle|\; a_\lambda \text{ は } R \text{ の元で，有限個の } \lambda\in\Lambda \text{ を除いて } a_\lambda = 0_R \right\}$$

は R のイデアルとなる．これを $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ **で生成されるイデアル**といい，

$$(x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$$

とも書く．この定義の $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda x_\lambda$ は無限個の元の和に見えるが，有限個の項を除いて 0_R なので有限個の 0 でない項のみを足したものになっている．

$\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が有限集合 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ のとき，$(x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ を $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と表す．このとき，

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \;\middle|\; a_1, a_2, \ldots, a_n \in R \right\}$$

が成り立つ．

(3) 体のイデアルは自明なイデアルのみである．

(4) $\mathbb{Z}$ のイデアルは全て

$$(n) = n\mathbb{Z} := \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

の形をしている．

(5) $\mathbb{F}$ を体とする（例えば $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$）．このとき，$\mathbb{F}[x]$ のイデアルは全て

$$(f) = f\mathbb{F}[x] := \{fg \mid g \in \mathbb{F}[x]\} \quad (f \in \mathbb{F}[x])$$

の形をしている．

定義 1.11. 整域 R の全てのイデアルが (a) $(a \in R)$ の形をしているとき，R を**単項イデアル整域（principal ideal domain: PID）**という．

例 1.12. (1) 体は PID である．

(2) $\mathbb{Z}$ は PID である．

(3) 体 $\mathbb{F}$ に対して，$\mathbb{F}[x]$ は PID である．

1.3　環上の行列の線型代数

ここでは環上の行列について，今後用いるものを証明抜きでまとめる．証明は線型代数学の対応する事実と全く同様なので各自確かめてみると良い（一応 [3] の 2.1, 2.2 節に書いてある）．

R を環とする．R 上の $m \times n$ 行列 A とは，R の元を m 行，n 列に並べたものである：

$$A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

このとき，体の元を成分に持つ行列と同様に積，和を定義することができる．

定義 1.13. R 上の n 次正方行列 A が**正則行列**であるとは，ある R 上の n 次正方行列 B が存在して $AB = BA = E_n$ を満たすときに言う（E_n は単位行列）．このとき，B を A の**逆行列**と言い，A^{-1} と表す．

定義 1.14. R 上の n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ を考える．

(1) A の**行列式**を

$$\mathrm{det}(A) := \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

で定義する．

(2) A の**余因子行列** $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ を，その (i,j) 成分を

$$\widetilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j} \mathrm{det}(A_{ji})$$

$(A_{ji}$ は A から第 j 行と第 i 列を取り除いた $n-1$ 次正方行列$)$

とすることで定義する．

命題 1.15. R 上の n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ を考える．このとき，

$$\widetilde{A}A = A\widetilde{A} = \mathrm{det}(A)E_n$$

が成り立つ．

特に，

$$A \text{ が正則行列} \iff \mathrm{det}(A) \text{ が } R \text{ の可逆元}$$

が成り立ち，このとき A の逆行列は

$$A^{-1} = \mathrm{det}(A)^{-1}\widetilde{A}$$

で与えられる．

定義 1.16. A を R 上の $m \times n$ 行列とする．このとき，A の**行（列）基本変形**とは，以下の操作である：

- A の二つの行（列）を入れ替える．
- A のある行（列）に R の可逆元を掛ける．
- A のある行（列）に R の元を掛けて別の行（列）に加える．

定義 1.17. 以下の n 次正方行列を**基本行列**と呼ぶ：

- $P_n(i,j)$：n 次単位行列の第 i 列と第 j 列を入れ替えたもの
- $Q_n(i;r)$：n 次単位行列の (i,i) 成分を r に取り替えたもの（r は R の可逆元）
- $R_n(i,j;r)$：n 次単位行列の (i,j) 成分を r に取り替えたもの（$i \neq j$ かつ r は R の元）

これらは全て正則行列である．

命題 1.18. A を R 上の $m \times n$ 行列とする．このとき，以下が成り立つ：

- A の第 i 行（列）と第 j 行（列）の行を入れ替える
  $\Longleftrightarrow$ A に左（右）から $P_n(i,j)$ を掛ける
- A の第 i 行（列）に R の可逆元 r を掛ける
  $\Longleftrightarrow$ A に左（右）から $Q_n(i;r)$ を掛ける
- A の第 i 行（列）に R の元 r を掛けて第 j 行（列）に加える（$i \neq j$）
  $\Longleftrightarrow$ A に左（右）から $R_n(i;r)$ を掛ける

従って，行列 A に基本変形を施して B にできるとき，ある正則行列 P, Q を用いて

$$B = PAQ$$

と表せる．

2　環上の加群の基礎

以下，この節では R を環とする．

2.1　加群と部分加群

定義 2.1.　アーベル群 M に R 作用

$$R \times M \to M, \quad (a, x) \mapsto ax$$

が与えられて以下の条件を満たすとき，M を R **加群**（**R-module**）という：

(i) 任意の $a, b \in R$ と $x \in M$ に対して $(ab)x = a(bx)$.

(ii) 任意の $a, b \in R$ と $x, y \in M$ に対して $(a+b)x = ax + bx$, $a(x+y) = ax + by$.

(iii) 任意の $x \in M$ に対して $1x = x$.

例 2.2.　(1) R 自身は R 作用

$$R \times R \to R, \quad (a, x) \mapsto ax$$

により R 加群となる：定義 1.3 の (ii), (iii), (iv) がそれぞれ定義 2.1 の (i), (ii), (iii) に対応している．

(2) $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$R^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1, a_2, \ldots, a_n \in R\}$$

は成分毎の加法と R 作用

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) &:= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \\ a(a_1, a_2, \ldots, a_n) &:= (aa_1, aa_2, \ldots, aa_n)\end{aligned}$$

で R 加群となる（ここではスペースの関係上 R^n の元を行ベクトルで書いているが，以降では列ベクトルで書くことが多い）．

$n = 1$ の場合が (1) の例になっている．

(3) $\mathbb{F}$ を体とする（$\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ を考えれば十分である）．このとき，$\mathbb{F}$ 加群とは $\mathbb{F}$ ベクトル空間に他ならない．

(4) $R = \mathbb{Z}$ のとき，$\mathbb{Z}$ 加群とはアーベル群に他ならない：
アーベル群 M に対して $\mathbb{Z}$ 作用を

$$nx := \begin{cases} \overbrace{x + x + \cdots + x}^{n\text{ 個}} & (n > 0) \\ 0 & (n = 0) \\ -((-n)x) & (n < 0) \end{cases}$$

で定めると，M は $\mathbb{Z}$ 加群となる．

(5) $R=\mathbb{C}[x]$ を $\mathbb{C}$ を係数とする 1 変数多項式環とし，$A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ とする．このとき，$M=\mathbb{C}^n$ は $\mathbb{C}[x]$ 作用

$$f\cdot \boldsymbol{v}:=f(A)\boldsymbol{v}\quad (f\in\mathbb{C}[x],\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n)$$

で $\mathbb{C}[x]$ 加群となる．例えば

$$x\cdot\boldsymbol{v}=A\boldsymbol{v},\quad (x^2+1)\cdot\boldsymbol{v}=(A^2+E_n)\boldsymbol{v}$$

である．

定義 2.3. M を R 加群とする．M の部分集合 L が条件：

(i) $0\in L$
(ii) 任意の $x,y\in L$ に対して $x+y\in M$
(iii) 任意の $a\in R$, $x\in M$ に対して $ax\in L$

を満たすとき，L **は** M **の（**R**）部分加群（submodule）**であるという．
このとき，L は M のアーベル群としての部分群となり，M と同じ R 作用で R 加群となる．

例 2.4. (1) R 加群 M の部分集合 $\{0\}$ と M は M の部分加群である．これらを**自明な部分加群**という． 誤解のおそれがない場合は $\{0\}$ は単に 0 と書くことが多い．

(2) R 加群 M の部分集合 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，M の部分集合

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}Rx_\lambda:=\left\{\sum_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda x_\lambda\;\middle|\; a_\lambda \text{ は } R \text{ の元で，有限個の } \lambda\in\Lambda \text{ を除いて } a_\lambda=0\right\}$$

は R の部分加群となる．これを $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ **で生成される** M **の部分加群**という．この定義の $\sum_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda x_\lambda$ は無限個の元の和に見えるが，有限個の項を除いて 0 なので有限個の 0 でない項のみを足したものになっている．

有限集合 $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ に対しては

$$\sum_{i=1}^n Rx_i:=\left\{\sum_{i=1}^n a_ix_i\;\middle|\; a_1,a_2,\ldots,a_n\in R\right\}$$

が成り立つ．

(3) R を R 加群と思ったとき，R の部分加群は R のイデアルに他ならない．

(4) $\mathbb{F}$ を体とする（$\mathbb{F}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ を考えれば十分である）．$\mathbb{F}$ ベクトル空間を $\mathbb{F}$ 加群と思ったとき，その部分加群は部分空間に他ならない．

(5) アーベル群を $\mathbb{Z}$ 加群と思ったとき，その部分加群は部分群に他ならない．

(6) m,n を正整数とし，$\mathsf{M}_{m,n}(R)$ を R 上の $m\times n$ 行列の全体の集合とする．このとき，$\mathsf{M}_{m,n}(R)$ は成分ごとの和と R 作用で R 加群となる．

2.2　剰余加群

M を R 加群，L を M の部分加群とする．$x \in M$ に対して M の部分集合 $x+L$ を

$$x + L := \{x + y \mid y \in L\}$$

で定める．

命題 2.5. (1) $x, x' \in M$ に対して

$$x + L = x' + L \Longleftrightarrow x - x' \in L.$$

特に，$x + L = L \Longleftrightarrow x \in L$.

(2) $M/L := \{x + L \mid x \in M\}$ は加法と R 作用

$$(x + L) + (x' + L) := (x + x') + L$$
$$a(x + L) := ax + L$$

で R 加群となる．

証明. (1) $(\Longrightarrow)$：$x = x + 0 \in x + L = x' + L$ なので，ある $y \in L$ 存在して $x = x' + y$ と表せる．このとき，$x - x' = y \in L$ となる．

(2) $(\Longleftarrow)$：$x + L$ の任意の元 $x + y$ $(y \in L)$ に対して，$x + y = x' + (x - x' + y) \in x' + L$ が成り立つ ($x - x', y \in L$ より $x - x' + y \in L$)．従って，$x + L \subseteq x' + L$ となる．逆の包含 $x' + L \subseteq x + L$ も同様に示される． ■

定義 2.6. 上の命題で得られた R 加群 M/L を **M の L による剰余加群**という．

2.3　準同型写像

定義 2.7. M, N を R 加群とする．

(1) 写像 $f : M \to N$ が条件

(i) 任意の $x, y \in M$ に対して $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(ii) 任意の $a \in R$, $x \in M$ に対して $f(ax) = af(x)$.

を満たすとき，f を R **準同型写像**（**R-homomorphism**）または R **線型写像**（**R-linear map**）という．

(2) 写像 $f : M \to N$ が条件

(i) f は R 準同型写像.

(ii) ある R 準同型写像 $g : N \to M$ が存在して，$g \circ f = \mathrm{id}_M$, $f \circ g = \mathrm{id}_N$ が成り立つ.

を満たすとき，f を R **同型写像**（**R-isomorphism**）という．
以下が成り立つことは容易に分かる：

$$f \text{ が } R \text{ 同型} \iff f \text{ は } R \text{ 準同型かつ全単射}$$

注意． 定義から

- f が R 準同型写像 $\iff$ f が群の準同型写像かつ (ii)
- f が R 同型写像 $\iff$ f が群の同型写像かつ (ii)

となることが分かる．

命題 2.8. (1) M を R 加群とすると，恒等写像 $\mathrm{id}_M : M \to M$ は R 準同型である．
(2) L, M, N を R 加群，$f : L \to M$, $g : M \to N$ を R 準同型写像とすると，合成写像 $g \circ f : L \to N$ も R 準同型である．

証明． (1) id_M は群の準同型写像である．一方で，任意の $a \in R$ と $x \in M$ に対して

$$\mathrm{id}_M(ax) = ax = a\mathrm{id}_M(x)$$

が成り立つので id_M は R 準同型となる．
(2) f, g は群の準同型写像なので $g \circ f$ も群の準同型写像である．一方で，任意の $a \in R$ と $x \in M$ に対して

$$(g \circ f)(ax) = g(f(ax)) = g(af(x)) = ag(f(x)) = a(g \circ f)(x)$$

が成り立つので $g \circ f$ は R 準同型となる． ■

定義 2.9. M, N を R 加群，$f : M \to N$ を R 準同型写像とする．

(1) $\mathrm{Ker}\, f := \{x \in M \mid f(x) = 0\}$ を f の**核**（**kernel**）という．
(2) $\mathrm{Im}\, f := \{f(x) \mid x \in M\}$ を f の**像**（**image**）という．
(3) $\mathrm{Coker}\, f := N / \mathrm{Im}\, f$ を f の**余核**（**cokernel**）という．

コメント． 核に対して余核があるように，像に対して**余像**（***coimage***）

$$\mathrm{Coim}\, f := M / \mathrm{Ker}\, f$$

を定義することもできる．しかし，準同型定理（定理 *2.12*）で示すように余像 $\mathrm{Coim}\, f$ は像 $\mathrm{Im}\, f$ と同型になってしまうのでわざわざ考えることはほとんどない．

補題 2.10. (1) $\mathrm{Ker}\, f$ は M の部分加群である．
(2) $\mathrm{Im}\, f$ は N の部分加群である．

証明. f は群の準同型写像なので $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ はそれぞれ M, N の部分群である．従って，これらが R 作用で閉じていることを示せば良い．

$a \in R$ と $x \in \operatorname{Ker} f$ に対して

$$f(ax) = af(x) = a0 = 0$$

が成り立つので $ax \in \operatorname{Ker} f$ となり，$\operatorname{Ker} f$ は M の部分加群である．

$a \in R$ と $f(x) \in \operatorname{Im} f$ に対して

$$af(x) = f(ax) \in \operatorname{Im} f$$

となるので $\operatorname{Im} f$ は N の部分加群である． ■

例 2.11. (1) M を R 加群，$x_1, x_2 \ldots, x_m \in M$ とする．このとき，

$$f : R^m \to M, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$$

は R 準同型写像で $\operatorname{Im} f = \sum_{i=1}^{m} Rx_i$ となる．特に，f が全射 $\iff M = \sum_{i=1}^{m} Rx_i$.

(2) $A = (r_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ を R 上の $m \times n$ 行列とする．このとき，

$$f_A : R^m \to R^n, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} r_{i1} a_i \\ \sum_{i=1}^{m} r_{i2} a_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} r_{in} a_i \end{pmatrix}$$

は R 準同型写像となる．

例えば $R = \mathbb{Z}$, $A = (a\ b)$ としたとき，

$$f_A : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto 2a + 4b$$

である．この f_A の核と像を計算すると，

- ${}^t(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ に対して

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f_A &\iff f_A({}^t(a, b)) = (0, 0) \\ &\iff 2a + 4b = 0 \\ &\iff a = -2b \\ &\iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} k \quad (\exists k \in \mathbb{Z}) \\ &\iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{Z} \end{aligned}$$

が成り立つので

$$\operatorname{Ker} f_A = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{Z}$$

- $\operatorname{Im} f_A = \left\{ f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \right\} = \{2a+4b \mid a, b \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}$

逆に，任意の R 準同型写像 $f : R^m \to R^n$ は $m \times n$ 行列

$$A = (f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \dots, f(\boldsymbol{e}_m)) \quad (\boldsymbol{e}_i \text{ は第 } i \text{ 成分が } 1 \text{ の単位ベクトル})$$

を用いて

$$f = f_A$$

と表せる（A は f の表現行列）．

(3) 任意の R 加群 M, N に対して，全ての M の元を N の零元に送る写像

$$M \to N,\ x \mapsto 0$$

は R 準同型写像である．これを**零写像（zero morphism）**といい，$0 : M \to N$ と表す．どのような R 加群 M から N に対しても零写像は必ず存在する．

R 準同型写像は零元を零元に送るので，零写像と R 準同型写像の合成は零写像となる．

(4) L が R 加群 M の部分加群のとき，

$$i : L \to M,\ x \mapsto x$$

は R 準同型である．また，$\operatorname{Ker} i = \{0\}$（$i$ は単射）かつ $\operatorname{Im} i = L$.

(5) L が R 加群 M の部分加群のとき，

$$\pi : M \to M/L,\ x \mapsto x + L$$

は R 準同型である．また，$\operatorname{Ker} \pi = L$ かつ $\operatorname{Im} \pi = M/L$（$\pi$ は全射）．

準同型定理は群論や環論でそうであったように，環上の加群の理論においても重要な役割を果たす．

定理 2.12 (準同型定理)**.** M, N を R 加群，$f : M \to N$ を R 準同型写像とする．

(1) M の部分加群 L が $f(L) = \{0\}$（$\Leftrightarrow f(x) = 0\ (\forall x \in L) \Leftrightarrow L \subseteq \operatorname{Ker} f$）を満たすとき，well-defined な R 準同型写像

$$\overline{f} : M/L \to N,\ x + L \mapsto f(x)$$

が存在する．

(2) well-defined な R 同型写像

$$\overline{f} : M/\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\cong} \operatorname{Im} f,\ x + \operatorname{Ker} f \mapsto f(x)$$

が存在する．

証明. 群の準同型定理より，(1)(2) のような well-defined な群の（準）同型写像 $\overline{f}$ が存在する．

(1) 任意の $a \in R,\, x \in M/L$ に対して

$$\overline{f}(a(x+L)) = \overline{f}(ax+L) = f(ax) = af(x) = a(\overline{f}(x+L))$$

となるので，$\overline{f}$ は R 準同型写像となる．

(2) (1) と同様に $\overline{f}$ は R 準同型写像となる．また，$\overline{f}$ は群の同型写像なので，これらを合わせて $\overline{f}$ は R 同型写像となることが分かる． ■

例 2.13. (1) $R = \mathbb{Z}$ のとき，$\mathbb{Z}$ 準同型

$$f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z},\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto 2a + 4b$$

を考える．例 2.11(2) より $\operatorname{Ker} f = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{Z}$, $\operatorname{Im} f = 2\mathbb{Z}$ なので，準同型定理より同型写像

$$\overline{f} : \mathbb{Z}^2 / \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} 2\mathbb{Z}$$

が存在する．

(2) R 加群 M がある有限個の元 $x_1, x_2, \ldots, x_m \in M$ を用いて $M = \sum_{i=1}^{m} Rx_i$ と表せるとする．このとき，例 2.11(1) より全射 R 準同型

$$f : R^m \to M,\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$$

が存在する．従って，準同型定理より R 同型

$$R^m / \operatorname{Ker} f \cong M$$

が存在する．

系 2.14. $f : M \to N$ を R 準同型写像, M', N' をそれぞれ M, N の部分加群とする．もし $f(M') \subseteq N'$ が成り立つならば，well-defined な R 準同型

$$\overline{f} : M/M' \to N/N',\ x + M' \mapsto f(x) + N'$$

を得る．また，

$$\operatorname{Ker} \overline{f} = f^{-1}(N')/M', \quad \operatorname{Im} \overline{f} = (\operatorname{Im} f + N')/N', \quad \operatorname{Coker} \overline{f} \cong N/(\operatorname{Im} f + N')$$

証明. f と自然な全射 $N \to N/N'$, $y \mapsto y + N'$ の合成 $M \to N/N'$, $x \mapsto f(y) + N'$ に定理 2.12(1) を用いれば良い． ■

定理 2.15 (対応定理（第四同型定理）)**.** M を R 加群，L を M の部分加群とし，以下の集合を考える：

- $\mathcal{X}$：M/L の部分加群全体の集合
- $\mathcal{Y}$：M の部分加群で L を含むもの全体の集合

このとき，対応

$$\varphi(T) := \pi^{-1}(T) = \{x \in M \mid x + L \in Y\} \quad (T \in \mathcal{X})$$
$$\psi(N) := \pi(N) = \{x + L \mid x \in N\} = N/L \quad (N \in \mathcal{Y})$$

は互いに逆な全単射

$$\varphi : \mathcal{X} \leftrightarrows \mathcal{Y} : \psi$$

を与える．

証明. 群論における対応する結果から，

- $\mathcal{X}'$：M/L の部分群全体の集合
- $\mathcal{Y}'$：M の部分群で L を含むもの全体の集合

の間に同様の対応 φ, ψ で全単射が存在する．従って，

- M/L の R 部分加群 T に対して $\varphi(T)$ が R 部分加群
- L を含む M の R 部分加群 N に対して $\psi(N)$ が R 部分加群

が成り立つことを示せば，$\mathcal{X}'$ と $\mathcal{Y}'$ の間の全単射は $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ の間の全単射に制限される．

T を M/L の R 部分加群とする．$a \in R$ と $x \in \varphi(T)$ に対して，$x + L \in T$ なので

$$ax + L = a(x + L) \in T$$

となり，$ax \in \varphi(T)$．従って，$\varphi(T)$ は R 部分加群．

N を L を含む M の R 部分加群とする．$a \in R$ と $x + L \in \psi(N)$ $(x \in N)$ に対して，

$$a(x + L) = ax + L \in \psi(N)$$

となり，$\psi(N)$ は R 部分加群. ■

2.4 直和と直積

定義 2.16. Λ を集合とし，Λ の元で添字付けられた R 加群の族 $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を考える．

(1) $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**直積（direct product）**を

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda := \{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid x_\lambda \in M_\lambda \ (\forall\lambda \in \Lambda)\}$$

定義する．このとき，$\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ は成分ごとの加法と R 作用：

$$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} + (x'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} := (x_\lambda + x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$
$$a(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} := (ax_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

で R 加群となる．

(2) $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**直和（direct sum）**を

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda := \left\{ (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \;\middle|\; 有限個の\ \lambda\in\Lambda\ を除いて\ x_\lambda = 0 \right\}$$

定義する．このとき，$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ は $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ の部分加群となる．

注意. 有限個の R 加群 $M_1, M_2, \ldots, M_n$ に対して，

$$\bigoplus_{i=1}^n M_i = \prod_{i=1}^n M_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in M_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$$

が成り立つ．

定義 2.17. $M_\lambda = R\ (\lambda\in\Lambda)$ のとき，

$$R^{(\Lambda)} := \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \{(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid a_\lambda \in R\ (\lambda\in\Lambda)\ で，有限個の\ \lambda\ を除いて\ a_\lambda = 0\}$$

と表す．Λ が有限集合 $\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$ のとき，$R^{(\Lambda)}$ は R^n に他ならない．
R 加群 M が**自由加群（free module）**であるとは，ある集合 Λ と R 同型 $M \cong R^{(\Lambda)}$ が存在するときに言う．

定義 2.18. M を R 加群とし，$\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を集合 Λ の元で添字付けられた M の元の族とする．

(1) $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が M を**生成する**とは，

$$M = \sum_{\lambda\in\Lambda} Rx_\lambda$$

が成り立つときにいう．つまり，M の任意の元 x が

$$x = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda x_\lambda \quad (a_\lambda \in R\ (\forall\lambda\in\Lambda)\ で，有限個の\ \lambda\in\Lambda\ を除いて\ a_\lambda = 0)$$

と表せることをいう．

(2) $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が**一次独立**であるとは，任意の $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda x_\lambda \in \sum_{\lambda\in\Lambda} Rx_\lambda$ に対して，

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda x_\lambda = 0 \Longrightarrow a_\lambda = 0\ (\forall\lambda\in\Lambda)$$

が成り立つときにいう．

(3) $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が一次独立かつ M を生成するとき，$\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を M **の基底（basis）**という．

注意. M の有限個の元の族 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ を考えたとき，上の定義は

- $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ が M を生成する
  $\Longleftrightarrow$ 任意の $x \in M$ は $x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ $(\exists a_i \in R)$ と表せる
- $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ が一次独立
  $\Longleftrightarrow$ 任意の $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ に対して，

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \Longrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = 0$$

となっている．従って，上で導入した生成，一次独立，および基底の定義は線型代数で現れた同名の定義を一般の環上の加群に拡張したものであることが分かる（R が体ならば線型代数で学んだものと全く同じである）.

補題 2.19. M を R 加群とし，$\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を M の元の族とする．このとき以下が成り立つ：

(1) 写像

$$f : R^{(\Lambda)} \to M,\ (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda x_\lambda$$

は R 準同型写像であり，$\operatorname{Im} f = \sum_{\lambda\in\Lambda} Rx_\lambda$ が成り立つ.

(2) f が全射 $\Longleftrightarrow$ $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が M を生成する

(3) f が単射 $\Longleftrightarrow$ $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が一次独立

証明. (1) 任意の $r \in R$ と $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in R^{(\Lambda)}$ に対して，

$$\begin{aligned} f((a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} + (b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = f((a_\lambda + b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) &= \sum_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda + b_\lambda)x_\lambda \\ &= \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda x_\lambda + \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda x_\lambda = f((a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) + f((b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \end{aligned}$$

$$f(r(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = f((ra_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = \sum_{\lambda\in\Lambda} ra_\lambda x_\lambda = r\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda x_\lambda\right) = rf((a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$$

が成り立つので f は R 準同型写像.

また，等号 $\operatorname{Im} f = \sum_{\lambda\in\Lambda} Rx_\lambda$ は $\sum_{\lambda\in\Lambda} Rx_\lambda$ と写像 f の定義からすぐに分かる.

(2) は (1) よりすぐに分かる．(1) は f が単射であることと $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ が同値であることを考えれば定義そのものである. ■

命題 2.20. M を R 加群とする.

(1) $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を集合 Λ の元で添字付けられた M の元の族とする．$\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が M の基底のとき，

$$f : R^{(\Lambda)} \xrightarrow{\cong} M,\ (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda x_\lambda$$

は R 同型写像となる.

(2) R 同型写像 $f : R^{(\Lambda)} \xrightarrow{\cong} M$ が存在するとき，$\{f(\boldsymbol{e}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ は M の基底となる．ここで，$\boldsymbol{e}_\lambda$ は λ 成分が 1 でそれ以外の成分が 0 であるような $R^{(\Lambda)}$ の元（R^n のときは単位ベクトルになっている).

証明. (1) 補題 2.19 より「f が全単射 $\iff \{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が一次独立かつ M を生成する」が成り立つ．

(2) $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in R^{(\Lambda)}$ は

$$(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \boldsymbol{e}_\lambda$$

と表せる（各 λ に対して両辺の λ 成分を比較せよ）．従って，写像 f は

$$f((a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = f\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \boldsymbol{e}_\lambda\right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda f(\boldsymbol{e}_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda x_\lambda$$

という形である．このとき，補題 2.19 を用いると，f が全単射であることから $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は一次独立かつ M を生成する．よって，$\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は M の基底である． ■

命題 2.20 から，R 加群 M に対して

$$M \text{ が基底を持つ} \iff M \text{ が自由加群}$$

が成り立つことが分かる．

2.5 環上の加群の構造について

与えられた環 R 上の加群を理解するためには，より分かりやすい加群との間の同型を見つければ良い．この節では体や PID 上の有限生成加群の構造について考える．

定義 2.21. R 加群 M が**有限生成（finitely generated）**であるとは，M が有限個の元で生成されるときに言う．つまり，ある有限個の元 $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ が存在して

$$M = \sum_{i=1}^{n} Rx_i$$

が成り立つときに言う．
このとき，補題 2.19 により

$$M \text{ が有限生成} \iff \text{ある整数 } n \geq 1 \text{ と全射 } R \text{ 準同型 } R^n \to M \text{ が存在する}$$

が成り立つ．

可換環論およびその周辺分野では有限生成加群を扱うことが多いが，一般に有限生成加群の部分加群が有限生成となるとは限らない（例：無限個の変数を持つ多項式環 $R = \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots]$ 自身は R 加群として有限生成であるが，その変数達で生成されたイデアル $(x_i \mid i = 1, 2, \dots)$ は有限生成ではない）．従って，有限生成加群で話を収めるためには以下のような条件を課すことが必要である．

定義 2.22. 環 R は全てのイデアルが有限生成であるとき，**ネーター環（Noetherian ring）**という．

例 2.23. (1) 体 $\mathbb{F}$ のイデアルは $\{0\}$ と $\mathbb{F}$ のみだが，これらは 1 個の元で生成される（それぞれ 0 と 1 で生成される）．従って，体はネーター環である．

(2) PID のイデアルは定義より全て 1 個の元で生成されるので，PID はネーター環である．

(3) 環 R と R のイデアル J を考える．R/J のイデアルは $J \subseteq I \subseteq R$ なる R のイデアル I を用いて I/J と表せる．このとき，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が I を生成するならば $x_1 + J, x_2 + J, \ldots, x_n + J$ は I/J を生成する．従って，R がネーター環ならば R の剰余環 R/J はネーター環である．

可換環論やその関連分野において現れる環は体または $\mathbb{Z}$ を係数をする多項式環のあるイデアルに関する剰余環であることが多い．従って，例 2.23 および以下の定理から通常現れる環は全てネーターであると思っても差し支えない．

定理 2.24（ヒルベルトの基底定理（[3, 定理 1.13.5]））**.** ネーター環 R を係数とする多項式環 $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ は再びネーターである．

ネーター環上の有限生成加群は以下のような良い性質を持つ．

定理 2.25 ([3, 命題 2.9.1])**.** 環 R に対して次の 2 条件は同値：

(1) R はネーターである．

(2) 全ての有限生成 R 加群の部分加群は再び有限生成になる．

R をネーター環，M を有限生成 R 加群とする．このとき，ある整数 $m \geq 1$ と全射 R 準同型写像

$$f : R^m \to M$$

が存在する．準同型定理（定理 2.12）より R 加群の同型

$$M \cong \mathsf{Coker}\, f \ (= R^m / \mathsf{Ker}\, f)$$

が存在する．ここで，R がネーター環なので定理 2.25 より R^m の部分加群 $\mathsf{Ker}\, f$ は再び有限生成となり，ある整数 $n \geq 1$ と全射 R 準同型写像

$$g : R^n \to \mathsf{Ker}\, f$$

が存在する．このとき，g と包含写像 $\mathsf{Ker}\, f \to R^m$, $x \mapsto x$ の合成写像は

$$g : R^n \to R^m$$

という形をしている（誤解の恐れはないと思うのでこれも同じ記号 g で表している）．すると，例 2.11(2) より g は表現行列

$$A = (g(\boldsymbol{e}_1), g(\boldsymbol{e}_2), \ldots, g(\boldsymbol{e}_n)) \in M_{m,n}(R)$$

を用いて $g = f_A$ と表せる：$g(\boldsymbol{a}) = A\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a} \in R^n$)．容易に分かるように $\mathsf{Ker}\, f = \mathsf{Im}\, g = \mathsf{Im}\, f_A$ が成り立つので，R 加群の同型

$$M \cong \mathsf{Coker}\, f_A \ (= R^m / \mathsf{Im}\, f_A)$$

を得る．この同型により，R 加群 M は行列 A により完全に決定されてしまうことが分かる．しかし，依然として $\mathrm{Coker}\, f_A$ がよく分からない加群であることには変わりないので行列 A を基本変形によって行列 B に変形する．このとき，命題 1.18 により，ある正則行列 P, Q を用いて $B = PAQ$ と表せるので，R 線型写像の等式

$$f_B = f_P \circ f_A \circ f_Q : R^n \xrightarrow{f_Q} R^n \xrightarrow{f_A} R^m \xrightarrow{f_P} R^m$$

を得る．ここで，f_P, f_Q が R 同型写像であることに注意すると，R 同型

$$M \cong \mathrm{Coker}\, f_A \cong \mathrm{Coker}\, f_B$$

を得る（問題 2.1 参照）．従って，R 加群の構造を決定するという問題は R 上の行列を基本変形により簡約化すると言う問題に帰着される．

- $R = \mathbb{F}$ が体のとき：
  線型代数学で学ぶように，体 $\mathbb{F}$ 上の任意の行列 A は基本変形により

$$B = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

のように変形することができる．この事実により，有限生成なベクトル空間に対して以下の定理を示すことができる：

定理 2.26. $\mathbb{F}$ を体とする．このとき，全ての $\mathbb{F}$ ベクトル空間 V は基底を持つ．
特に，全てのベクトル空間 V は基底を持つ．つまり，ある集合 Λ が存在して $V \cong F^{(\Lambda)}$ となる．

証明. V が有限生成の場合のみ考える（無限生成の場合はこの事実はもっと深く，選択公理と同値である）．このとき，上の議論により，

$$B = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

の形の行列を用いて

$$V \cong \mathbb{F}^m / \mathrm{Im}\, f_B$$

と表せることが分かる．ここで，$\mathrm{Im}\, f_B = \mathbb{F}\boldsymbol{e_1} \oplus \mathbb{F}\boldsymbol{e_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}\boldsymbol{e_r} \oplus \overbrace{\{0\} \oplus \{0\} \oplus \cdots \oplus \{0\}}^{m-r\text{ 個}}$ となるので，

$$V \cong \mathbb{F}^m / \mathrm{Im}\, f_B \cong \mathbb{F}/\mathbb{F}\boldsymbol{e_1} \oplus \mathbb{F}/\mathbb{F}\boldsymbol{e_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}/\mathbb{F}\boldsymbol{e_r} \oplus \overbrace{\mathbb{F}/\{0\} \oplus \mathbb{F}/\{0\} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}/\{0\}}^{m-r\text{ 個}} \cong \mathbb{F}^{m-r}$$

が示された． ■

- R が PID のとき：
  単因子論と呼ばれる理論により，PID R 上の任意の行列 A は基本変形により

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

（B_{11}は $a_1, a_2, \ldots, a_r \in R \setminus \{0\}$ を対角成分に持つ対角行列で $a_i | a_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$）

のように変形することができる．

定理 2.27 (PID 上の有限生成加群の構造定理 [3, 定理 2.12.1]). R を PID とする．このとき，任意の有限生成 R 加群 M は

$$R^k \oplus R/a_1R \oplus R/a_2R \oplus \cdots \oplus R/a_rR$$
$$(k \geq 0,\ a_1, a_2, \ldots, a_r \in R \setminus \{0\} \text{ かつ } a_i | a_{i+1}\ (i = 1, 2, \ldots, r-1))$$

の形の加群と同型.

証明. 任意の行列 A が基本変形を施して上記のような行列 B に変形できること認めると（ここが本質的であるが...），命題 2.20 と同様に示される． ■

特に，$R = \mathbb{Z}$ とすれば有限生成アーベル群の構造定理を得る．

定理 2.28 (有限生成アーベル群の構造定理). 全ての有限生成アーベル加群は

$$\mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/a_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/a_t\mathbb{Z} \quad (r \geq 0,\ a_1, a_2, \ldots, a_t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

の形のアーベル群と同型となる．

別の応用として行列のジョルダン標準形がある．$\lambda \in \mathbb{C}$ と $n \geq 1$ に対して

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

の形の行列を**ジョルダン細胞**という（対角成分には λ が並び，その右斜め上の部分には 1 が並ぶ．それ以外の成分は全て 0 である)．$\mathbb{C}$ 上の n 次正方行列 A がある正則行列 P を用いて

$$J := PAP^{-1} = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ O & J_{n_2}(\lambda_2) & \cdots & O \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

と表せるとき，A は**ジョルダン標準形 J を持つ**という．ジョルダン標準形は一般に対角行列ではないが，対角成分とその右斜め上の部分以外の成分が 0 であるという意味で対角行列に非常に近いものである．

R として $\mathbb{C}$ 上の 1 変数多項式環 $R = \mathbb{C}[x]$ を考え，$M = \mathbb{C}^n$ を例 2.2(5) のようにして $\mathbb{C}[x]$ 加群と思う．この M に定理 2.27 を用いることで以下のことが示される．

定理 2.29. （[3, 定理 2.12.1]） 任意の $\mathbb{C}$ 上の正方行列 A はジョルダン標準形を持つ．

- R が一般の環のとき：

一般の環 R 上の行列の基本変形はもっと難しい．例えば，$\mathbb{C}[x, y]$ という PID の次に簡単そうな環の場合でも，行列

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$$

は基本変形で対角行列にすることはできない．このことは一般の環に対しては加群の構造が非常に複雑であることを表している．

R 加群 M の構造をもっとよく理解するために以下のようなこと考える．先ほどの議論から，ある R 上の行列 A と R 同型 $M \cong \mathrm{Coker}\, f_A = R^m / \mathrm{Im}\, f_A$ が存在した．線型代数の話を思い出すと，$\mathrm{Im}\, f_A$ を理解するためには $\mathrm{Ker}\, f_A$ を理解すれば良い．もし R が PID ならば $\mathrm{Ker}\, f_A$ は自由加群になり，その構造は完全に分かる．しかし，一般の場合は $\mathrm{Ker}\, f_A$ はよく分からない加群である．そこで，$\mathrm{Ker}\, f_A$ に対して同じことを考えることで，ある行列 A' と R 同型 $\mathrm{Ker}\, f_A \cong \mathrm{Coker}\, f_{A'}$ を見つける．この $f_{A'}$ を用いることで $\mathrm{Ker}\, f_A$ の構造が理解できると考えられる．このとき，R 加群と R 線型写像の列

$$R^k \xrightarrow{f_{A'}} R^n \xrightarrow{f_A} R^m$$

を得るが，その構成から $\mathrm{Ker}\, f_A \cong \mathrm{Im}\, f_{A'}$ となる．$\mathrm{Ker}\, f_{A'}$ を理解するために同様の操作を繰り返していくと，R 加群と R 線型写像の列

$$\cdots \xrightarrow{f_{A''}} R^k \xrightarrow{f_{A'}} R^n \xrightarrow{f_A} R^m$$

を得る．この列は隣合う準同型について，右側の準同型の核は左側の準同型の核と同型となっている．このような条件を満たす R 加群と R 線型写像の列のことを**複体**（または**完全列**）と呼ぶ．以上の議論から，この複体（従って，R 上の行列の列 $A, A', A'', \ldots$）は M の情報を完全に含んでいると考えることができる．次章以降では，複体について調べる理論であるホモロジー代数について解説していく．

演習問題

問題 2.1. R を環，K, L, M, N を R 加群，$f : K \to L, g : L \to M, h : M \to N$ を R 準同型写像とする．

(1) f が全射のとき，$\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, f$ となることを示せ．
(2) h が単射のとき，$\mathrm{Ker}(h \circ g) = \mathrm{Ker}\, g$ となることを示せ．
(3) h が全単射のとき，R 同型写像 $\mathrm{Coker}\, g \xrightarrow{\cong} \mathrm{Coker}(h \circ g),\ x + \mathrm{Im}\, g \mapsto h(x) + \mathrm{Im}(h \circ g)$ が定まることを示せ．
(4) f が全単射のとき，R 同型写像 $\mathrm{Ker}(g \circ f) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ker}\, g,\ x \mapsto f(x)$ が定まることを示せ．

問題 2.2. 以下の $\mathbb{Z}$ 上の行列 A を基本変形で対角行列に変形し，$\mathrm{Coker}\, f_A$ を計算せよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}$
(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & -7 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

問題 2.3. $R = \mathbb{C}[x, y]$ 上の行列

$$A = \begin{pmatrix} x + y + 1 & x^2 - x - y \\ x & 1 - x \\ y & x^2 - y \end{pmatrix}$$

を基本変形し，それを用いて Coker f_A を計算せよ．

問題 2.4. $\mathbb{C}[x,y]$ のイデアル $I=(x^2+y^2)$ による剰余環 $R=\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2)$ 上の行列

$$A=\begin{pmatrix}\overline{x} & -\overline{y}\\ \overline{y} & \overline{x}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\overline{x} & \overline{y}\\ -\overline{y} & \overline{x}\end{pmatrix}$$

を考える（ただし，$\overline{x}:=x+I, \overline{y}:=y+I$）．このとき，

$$\mathsf{Ker}\, f_A=\mathsf{Im}\, f_B,\quad \mathsf{Ker}\, f_B=\mathsf{Im}\, f_A$$

となることを示せ．

ヒント：$\mathbb{C}[x,y]$ 上の行列

$$A'=\begin{pmatrix}x & -y\\ y & x\end{pmatrix},\quad B'=\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}$$

は

$$AB=BA=(x^2+y^2)I_n$$

を満たしている．

3　テンソルと Hom

この節では環上の加群の理論で重要な役割を果たす Hom 加群とテンソル加群について解説する．
以下，R を環とする．

3.1　Hom 加群

補題 3.1.　M, N を R 加群とする．

(1) 写像 $0 : M \to N$ を $0(m) = 0$ $(m \in M)$ で定めると，これは R 準同型写像となる．
(2) R 準同型写像 $f, g : M \to N$ に対して写像 $f + g : M \to N$ を $(f + g)(m) = f(m) + g(m)$ $(m \in M)$ で定めると，これは R 準同型写像となる．
(3) R 準同型写像 $f : M \to N$ と $r \in R$ に対して写像 $rf : M \to N$ を $(rf)(m) = r(f(m))$ $(m \in M)$ で定めると，これは R 準同型写像となる．

証明. 証明は簡単なので省略（各自確かめよ）. ■

定義 3.2.　M, N を R 加群とする．M から N への R 準同型写像の集合を

$$\mathsf{Hom}_R(M, N) := \{f : M \to N \mid f \text{ は } R \text{ 準同型写像 }\}$$

と置く．以下の補題により $\mathsf{Hom}_R(M, N)$ は加法 $f + g$ と R 作用 rf $(f, g \in \mathsf{Hom}_R(M, N),\ r \in R)$ で R 加群となる．これを **Hom 加群（Hom module）**と呼ぶ．

命題 3.3.　R を環，I を R のイデアル，M を R 加群とする．

(1) $(0 :_M I) := \{m \in M \mid Im = 0\}$ が M の部分加群となることを示せ．
(2) 写像

$$f : \mathsf{Hom}_R(R/I, M) \to M,\ \varphi \mapsto \varphi(1 + I)$$

は R 同型 $\mathsf{Hom}_R(R/I, M) \cong (0 :_M I)$ を定めることを示せ．

証明. (1) 任意の $m, m' \in (0 :_M I)$ に対して $I(m + m') = Im + Im' = 0 + 0 = 0$ となるので $m + m' \in (0 :_M I)$．任意の $m \in (0 :_M I)$ と $a \in R$ に対して $I(am) = a(Im) = a0 = 0$ となるので $am \in (0 :_M I)$.
以上より，$(0 :_M I)$ は M の部分加群.

(2) $\underline{f \text{ は単射}}$：
$\varphi \in \mathsf{Hom}_R(R/I, M)$ が $f(\varphi) = \varphi(1 + I) = 0$ を満たすとする．このとき，任意の $a \in R$ に対して

$$\varphi(a + I) = \varphi(a \cdot (1 + I)) = a\varphi(1 + I) = a \cdot 0 = 0$$

となるので $\varphi = 0$.
$\underline{f \text{ は全射}}$：

与えられた $m \in (0 :_M I)$ に対して，$\varphi : R \to M$ を $\varphi(a) = am$ と定めると φ は R 準同型写像となる．また，任意の $a \in I$ に対して $m \in (0 :_M I)$ より $\varphi(a) = am = 0$ となるので準同型定理（定理 2.12(1)）より R 準同型写像 $\overline{\varphi} : R/I \to M,\ a + I \mapsto \varphi(a) = am$ が定まる．このとき，$\overline{\varphi} \in \mathrm{Hom}_R(R/I, M)$ であり，$f(\overline{\varphi}) = \overline{\varphi}(1 + I) = m$ が成り立つ． ■

命題 3.4. $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を R 加群の族，X を R 加群とする．このとき，以下の R 同型が存在する：

(1) $\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, X) \xrightarrow{\cong} \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(M_\lambda, X),\ \varphi \mapsto (\varphi \circ i_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$
(2) $\mathrm{Hom}_R(X, \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda) \xrightarrow{\cong} \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(X, M_\lambda),\ \varphi \mapsto (\pi_\lambda \circ \varphi)_{\lambda\in\Lambda}$

ここで，

$$\begin{aligned} i_\lambda :& M_\lambda \to \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda,\ m \mapsto i_\lambda(m) := (\text{第 } \lambda \text{ 成分が } m \text{ でそれ以外が } 0 \text{ の元}) \\ \pi_\lambda :& \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to M_\lambda,\ (m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto m_\lambda \end{aligned}$$

と定義している．

証明. (1) この写像を $f : \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, X) \to \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(M_\lambda, X)$ と書く．

<u>f の単射性</u>：

$f(\varphi) = 0$ とすると，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\varphi \circ i_\lambda = 0$．$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ の任意の元 $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は

$$(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = \sum_{\lambda\in\Lambda} i_\lambda(m_\lambda)$$

と表せる（有限個の成分を除いて 0 なので右辺は有限和）ので，

$$\varphi((m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = \varphi(\sum_{\lambda\in\Lambda} i_\lambda(m_\lambda)) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \varphi(i_\lambda(m_\lambda)) = \sum_{\lambda\in\Lambda} (\varphi \circ i_\lambda)(m_\lambda) = 0.$$

従って，$\varphi = 0$ となり，f は単射．

<u>f の全射性</u>：

$(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(M_\lambda, X)$ を考える．このとき，$\varphi : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to X$ を

$$\varphi((m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) := \sum_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(m_\lambda)$$

と定義すると φ は R 準同型写像となる．また，任意の $m_\lambda \in M_\lambda$ に対して $(\varphi \circ i_\lambda)(m_\lambda) = \varphi(i_\lambda(m_\lambda)) = \varphi_\lambda(m_\lambda)$（$i_\lambda(m_\lambda)$ は λ 成分が m_λ でそれ以外が 0 だった）となるので，$\varphi \circ i_\lambda = \varphi_\lambda$．従って，$f(\varphi) = (\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ となり，f は全射．

(2) この写像を $f : \mathrm{Hom}_R(X, \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda) \xrightarrow{\cong} \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(X, M_\lambda)$ と書く．

<u>f の単射性</u>：

$f(\varphi) = 0$ とすると，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\pi_\lambda \circ \varphi = 0$．任意の $x \in X$ に対して $\varphi(x) = (m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と表すと，

$$0 = (\pi_\lambda \circ \varphi)(x) = \pi_\lambda(\varphi(x)) = \pi_\lambda((m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = m_\lambda \quad (\lambda \in \Lambda)$$

となり，$\varphi(x) = (m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = 0$．従って，$\varphi = 0$ となり，f は単射．

f の全射性：

$(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{Hom}_R(X, M_\lambda)$ を考える．このとき，$\varphi : X \to \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ を

$$\varphi(x) = (\varphi_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda} \quad (x \in X)$$

で定める．このとき，φ は R 準同型であり，

$$(\pi_\lambda \circ \varphi)(x) = \pi_\lambda(\varphi(x)) = \pi_\lambda((\varphi_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda}) = \varphi_\lambda(x)$$

となるので $\pi_\lambda \circ \varphi = \varphi_\lambda$．従って，$f(\varphi) = (\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ となり，f は全射． ■

例 3.5. (1) 任意の R 加群 M に対して $\mathsf{Hom}_R(R, M) \cong M$．

(2) 正整数 m, n に対して，$\mathsf{Hom}_R(R^n, R^m) \cong (R^m)^n = R^{mn} \cong \mathsf{M}_{m,n}(R)$．

(3) $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$ が成り立つ．

実際，$\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}$ 準同型写像とする．与えられた $0 \neq q \in \mathbb{Q}$ に対して，$\varphi(q) = \varphi(m \cdot \dfrac{1}{m}q) = m\varphi(\dfrac{1}{m}q) \in m\mathbb{Z}$ が任意の $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ に対して成り立つ．従って $\varphi(q) = 0$ でなければならない（0 でない整数の約数は有限個）．

(4) 整数 m, n に対して

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \quad (d = \mathsf{gcd}(m, n))$$

が成り立つ．

実際，命題 3.3 より

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (0 :_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} m\mathbb{Z}) = \{x + n\mathbb{Z} \mid mx \in n\mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

が成り立つ（最後の等号は演習問題 3.1）．

命題 3.6. X, M, N を R 加群，$f : M \to N$ を R 準同型写像とする．このとき，写像

$$f_* : \mathsf{Hom}_R(X, M) \to \mathsf{Hom}_R(X, N),\ \varphi \mapsto f_*(\varphi) := f \circ \varphi$$
$$f^* : \mathsf{Hom}_R(N, X) \to \mathsf{Hom}_R(M, X),\ \varphi \mapsto f^*(\varphi) := \varphi \circ f$$

は R 準同型となる．

証明. f_* が R 準同型であることを示す．

$\varphi, \psi \in \mathsf{Hom}_R(X, M)$ と $x \in X$ に対して，

$$f_*(\varphi + \psi)(x) = (f \circ (\varphi + \psi))(x) = f((\varphi + \psi)(x)) = f(\varphi(x) + \psi(x)) = f(\varphi(x)) + f(\psi(x))$$
$$(f_*(\varphi) + f_*(\psi))(x) = f_*(\varphi)(x) + f_*(\psi)(x) = (f \circ \varphi)(x) + (f \circ \psi)(x) = f(\varphi(x)) + f(\psi(x))$$

が成り立つので $f_*(\varphi + \psi) = f_*(\varphi) + f_*(\psi)$．

$\varphi \in \mathsf{Hom}_R(X,M)$, $r \in R$, $x \in X$ に対して,

$$f_*(r\varphi)(x) = (f \circ (r\varphi))(x) = f(r\varphi(x)) = rf(\varphi(x)) = r(f \circ \varphi)(x) = rf_*(\varphi)(x)$$

が成り立つので $f_*(r\varphi) = rf_*(\varphi)$.

f^* が R 準同型になることも同様. ■

命題 3.7. $f : L \to M, g : M \to N$ を R 準同型写像, X を R 加群とする. 以下の写像の等号が成り立つ:

$$\begin{aligned}
(\mathsf{id}_M)_* &= \mathsf{id}_{\mathsf{Hom}_R(X,M)} : \mathsf{Hom}_R(X,M) \to \mathsf{Hom}_R(X,M)\\
(g \circ f)_* &= g_* \circ f_* : \mathsf{Hom}_R(X,L) \to \mathsf{Hom}_R(X,N)\\
(\mathsf{id}_M)^* &= \mathsf{id}_{\mathsf{Hom}_R(M,X)} : \mathsf{Hom}_R(M,X) \to \mathsf{Hom}_R(M,X)\\
(g \circ f)^* &= f^* \circ g^* : \mathsf{Hom}_R(N,X) \to \mathsf{Hom}_R(L,X)
\end{aligned}$$

証明. 任意の $\varphi \in \mathsf{Hom}_R(X,M)$ に対して

$$(\mathsf{id}_M)_*(\varphi) = \mathsf{id}_M \circ \varphi = \varphi = \mathsf{id}_{\mathsf{Hom}_R(X,M)}(\varphi)$$

が成り立つので $(\mathsf{id}_M)_* = \mathsf{id}_{\mathsf{Hom}_R(X,M)}$.

任意の $\varphi \in \mathsf{Hom}_R(X,L)$ に対して

$$(g \circ f)_*(\varphi) = (g \circ f) \circ \varphi = g \circ (f \circ \varphi) = g \circ f_*(\varphi) = g_*(f_*(\varphi)) = (g_* \circ f_*)(\varphi)$$

が成り立つので $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

後半二つの等号も同様. ■

3.2 テンソル積

$\mathbb{R}$ ベクトル空間を思い出す. n 次元のベクトル空間 V があったとき, その基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を固定すると同型

$$\begin{array}{ccc}
V & \cong & \mathbb{R}^n\\
\Psi & & \Psi\\
\boldsymbol{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{v_i} & \longleftrightarrow & (x_i)_{1 \le i \le n}
\end{array}$$

があり, V の元は数ベクトル $(x_i)_{1 \le i \le n}$ とみなすことができる. さらに, 基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ から $\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n$ への取り替え

$$\boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \boldsymbol{v}'_i \tag{$*$}$$

を考えると,

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^n x_j \boldsymbol{v_j} = \sum_{i,j=1}^n x_j a_{ij} \boldsymbol{v'_i} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \boldsymbol{v}'_i$$

$\boldsymbol{x}$ に対応する数ベクトルは

$$(x_i)_{1\le i\le n} \rightsquigarrow \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)_{1\le i\le n} \tag{$**$}$$

と変換される．従って，V の元とは数ベクトル $(x_i)_{1\le i\le n}$ であり，基底の取り替え $(*)$ の元で $(**)$ のように変換されるものと思うことができる．対応する数ベクトルを考える方が直感的に分かり易いが，基底を取り替えたときに成分も変換されてしまうので，ベクトル空間 V の元だと考えた方が基底によらない議論ができるというメリットがある．

テンソルはベクトルのある種の多次元化と見ることができる．ベクトル空間 V, W があったとき，V と W の**テンソル積**と呼ばれるベクトル空間 $V\otimes_{\mathbb{R}} W$ が定義される．これは $\boldsymbol{y}\otimes\boldsymbol{z}$ $(\boldsymbol{y}\in V, \boldsymbol{z}\in W)$ という形の元で生成されるベクトル空間であり，V と W の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ と $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ を固定したとき

$$\boldsymbol{y}\otimes\boldsymbol{z} = \sum_{i,j} y_i z_j \boldsymbol{v}_i\otimes\boldsymbol{w}_j \quad \left(\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{m} y_i\boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{z} = \sum_{j=1}^{m} z_j\boldsymbol{w_j}\right) \tag{$***$}$$

が成り立つ．さらに，$V\otimes_{\mathbb{R}} W$ は $\boldsymbol{v}_i\otimes\boldsymbol{w}_j \quad (i=1,2,\ldots,m, j=1,2,\ldots,n)$ という mn 個の元が基底になる．従って，同型

$$\begin{array}{ccc} V\otimes_{\mathbb{R}} W & \cong & \mathbb{R}^{mn} \\ \cup & & \cup \\ \boldsymbol{x} = \displaystyle\sum_{i,j} x_{ij}\boldsymbol{v}_i\otimes\boldsymbol{w}_j & \longleftrightarrow & (x_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n} \end{array}$$

により $V\otimes_{\mathbb{R}} W$ の元は $(x_{ij})_{1\le i\le m,1\le j\le n}$ という二つの添え字を持つ実数の組と同一視できる．すると，条件 $(***)$ により $(x_{ij})_{1\le i\le m,1\le j\le n}$ も V, W の基底変換の元で $(**)$ のような変換を受ける．ここで，$(***)$ の条件が成り立つためには

- $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')\otimes\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}'\otimes\boldsymbol{y}$
- $\boldsymbol{x}\otimes(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}') = \boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y}'$
- $(a\boldsymbol{x})\otimes\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\otimes(a\boldsymbol{y}) = a(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})$

が必要十分であることは容易に分かる．従って，これらの条件を満たすような $x\otimes y$ $(x\in V, y\in W)$ を無理矢理構成すればよい．

以下，R を可換環とする．

構成． R 加群 M, N に対して R 加群 $M\otimes_R N$ を以下のようにして構成する．

(i) 直積集合 $M\times N$ を添字集合とする自由加群 $Y := R^{(M\times N)}$ を考える．ここで，$(m,n)\in M\times N$ に対して，(m,n) 成分が 1 でそれ以外の成分が 0 であるような Y の元を $\boldsymbol{e}_{(m,n)}$ と表すと，$\{\boldsymbol{e}_{(m,n)}\}_{(m,n)\in M\times N}$ は Y の基底となる．

(ii) Z を以下の元達で生成される Y の部分加群とする：

▷ $\boldsymbol{e}_{(m+m',n)} - \boldsymbol{e}_{(m,n)} - \boldsymbol{e}_{(m',n)} \quad (m, m'\in M, n\in N)$

▷ $\boldsymbol{e}_{(m,n+n')} - \boldsymbol{e}_{(m,n)} - \boldsymbol{e}_{(m,n')} \quad (m\in M, n, n'\in N)$

▷ $\boldsymbol{e}_{(am,n)} - a\boldsymbol{e}_{(m,n)}$，$\boldsymbol{e}_{(m,an)} - a\boldsymbol{e}_{(m,n)} \quad (m\in M, n\in N, a\in R)$

(iii) $M \otimes_R N$ を Y の Z による剰余加群として定義する：$M \otimes_R N := Y/Z$.

(iv) $\boldsymbol{e}_{(m,n)}$ の $M \otimes_R N$ における剰余類を

$$m \otimes n := \boldsymbol{e}_{(m,n)} + Z$$

と表す.

このとき,

- $\{\boldsymbol{e}_{(m,n)}\}_{(m,n)\in M\times N}$ は Y を生成するので，$\{m \otimes n\}_{(m,n)\in M\times N}$ は $M \otimes_R N$ を生成する.
- (ii) に現れる元は全て Z の元なので，$M \otimes_R N$ において 0 となる．従って，
  - ▷ $(m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n \quad (m, m' \in M, n \in N)$
  - ▷ $m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n' \quad (m \in M, n, n' \in N)$
  - ▷ $(am) \otimes n = m \otimes (an) = a(m \otimes n) \quad (m \in M, n \in N, a \in R)$

  が成立する.

定義 3.8. $M \otimes_R N$ を **M と N のテンソル積**と呼ぶ.

注意. よくある間違い：$m \otimes n + m' \otimes n' = (m + m') \otimes (n + n')$
正しくは,

$$(m + m') \otimes (n + n') = m \otimes (n + n') + m' \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n' + m' \otimes n + m' \otimes n'$$

このテンソル積の構成は具体的であるが，どういう意味を持つものなのか分かりにくい．そこで，テンソル積が満たす性質を見ていく.

定義 3.9. L, M, N を R 加群とする．写像 $f : M \times N \to L$ が条件：

(i) 任意の $m, m' \in M$, $n \in N$ に対して $f(m + m', n) = f(m, n) + f(m', n)$.

(ii) 任意の $m \in M$, $n, n' \in N$ に対して $f(m, n + n') = f(m, n) + f(m, n')$

(iii) 任意の $a \in R$, $m \in M$, $n \in N$ に対して $f(am, n) = f(m, an) = af(m, n)$.

を満たすとき，f を R **双線型写像（R-bilinear map）**という.
この条件 (i)(ii)(iii) は以下のように言い換えることもできる：

(i') 任意の $m \in M$ に対して $f(m, -) : N \to L,\ n \mapsto f(m, n)$ は R 準同型.

(ii') 任意の $n \in N$ に対して $f(-, n) : M \to L,\ m \mapsto f(m, n)$ は R 準同型.

例 3.10. M, N を R 加群とする．このとき，写像 $\varphi : M \times N \to M \otimes_R N$ を

$$\varphi(m, n) := m \otimes_R n$$

と定義すると，上記構成で述べたことから φ は R 双線型写像となる.

定理 3.11. M, N を R 加群とする．

(1) $M \otimes_R N$ と $\varphi : M \times N \to M \otimes_R N$ は以下の条件を満たす：
任意の R 加群 L と R 双線型写像 $f : M \times N \to L$ に対して, ある R 準同型写像 $\overline{f} : M \otimes_R N \to L$ で $\overline{f} \circ \varphi = f$ を満たすものがただ一つ存在する．

(2) (1) の条件を満たすような $(M \otimes_R N, \varphi)$ は同型の差を除いてただ一つ．
つまり，別の R 加群 X と R 準同型写像 $\psi : M \times N \to X$ も (1) の条件を満たすとき，R 同型写像 $\theta : M \otimes_R N \to X$ が存在して，$\theta \circ \varphi = \psi$ が成り立つ．

証明. (1) 先ほど構成した R 加群 $M \otimes_R N$ と R 双線型写像 $\varphi : M \times N \to M \otimes_R N$ が条件を満たすことを確かめる．

$f : M \times N \to L$ を R 双線型写像とする．定理 2.15 により，R 準同型写像

$$g : Y \to L,\ (a_{(m,n)})_{(m,n) \in M \times N} = \sum_{(m,n) \in M \times N} a_{(m,n)} \boldsymbol{e}_{(m,n)} \mapsto \sum_{(m,n) \in M \times N} a_{(m,n)} f(m,n)$$

が定まる（定義より $g(\boldsymbol{e}_{(m,n)}) = f(m,n)$ である）．ここで，Z を生成する元を考えると，

- ▷ $g(\boldsymbol{e}_{(m+m',n)} - \boldsymbol{e}_{(m,n)} - \boldsymbol{e}_{(m',n)}) = f(m+m',n) - f(m,n) - f(m',n) = 0$
- ▷ $g(\boldsymbol{e}_{(m,n+n')} - \boldsymbol{e}_{(m,n)} - \boldsymbol{e}_{(m,n')}) = f(m,n+n') - f(m,n) - f(m,n') = 0$
- ▷ $g(\boldsymbol{e}_{(am,n)} - a\boldsymbol{e}_{(m,n)}) = f(am,n) - af(m,n) = 0,$
  $g(\boldsymbol{e}_{(m,an)} - a\boldsymbol{e}_{(m,n)}) = f(m,an) - af(m,n) = 0$

が成り立つ．Z の元は生成元の R 線型結合なので，このことから $f(Z) = 0$ であることが分かる．従って，準同型定理（定理 2.12(1)）より R 準同型写像

$$\overline{f} : M \otimes_R N = Y/Z \to L,\ \sum_{(m,n) \in M \times N} a_{(m,n)} m \otimes n \mapsto \sum_{(m,n) \in M \times N} a_{(m,n)} f(m,n)$$

が定まる（$m \otimes n = \boldsymbol{e}_{(m,n)} + Z$ に注意）．このとき，任意の $(x,y) \in M \times N$ に対して

$$(\overline{f} \circ \varphi)(m,n) = \overline{f}(\varphi(m,n)) = \overline{f}(m \otimes n) = f(m,n)$$

が成り立つので $\overline{f} \circ \varphi = f$．よって，この $\overline{f}$ が欲しかった R 準同型である．

このような $\overline{f}$ がただ一つしかないことを示すために，別の R 準同型写像 $\widetilde{f} : X \to L$ が $\widetilde{f} \circ \varphi = f$ を満たすとする．このとき，

$$\widetilde{f}(m \otimes n) = (\widetilde{f} \circ \varphi)(m,n) = f(m,n) = \overline{f}(m \otimes n)$$

となる．X の元は $\{m \otimes n \mid m \in M, n \in N\}$ の元の R 線型結合なので，この等式から $\widetilde{f} = \overline{f}$ が成り立つ．

(2)：(X, ψ) が (1) の条件を満たすと仮定する．$\psi : M \times N \to X$ は R 双線型写像なので，$(M \otimes_R N, \varphi)$ が (1) の条件を満たすことから，R 準同型写像 $\overline{\psi} : M \otimes_R N \to X$ で $\overline{\psi} \circ \varphi = \psi$ を満たすものがただ一つ存在する．同様にして，(X, ψ) が (1) の条件を満たすことから，R 準同型写像 $\overline{\varphi} : X \to M \otimes_R N$ で $\overline{\varphi} \circ \psi = \varphi$ を満たすものがただ一つ存在する．

このとき，$(\overline{\varphi} \circ \overline{\psi}) \circ \varphi = \overline{\varphi} \circ \psi = \varphi = \mathrm{id}_{M \otimes_R N} \circ \varphi$ となる．(1) の条件の一意性から $\overline{\varphi} \circ \overline{\psi} = \mathrm{id}_{M \otimes_R N}$．同様に，$(\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}) \circ \psi = \overline{\psi} \circ \varphi = \psi = \mathrm{id}_X \circ \psi$ より $\overline{\psi} \circ \overline{\varphi} = \mathrm{id}_X$ となる．よって，$\theta := \overline{\varphi}$ が条件を満たす． ■

注意． この節の最初で $M\otimes_R N$ を具体的に構成したが，定理 3.11(1) の条件を満たすような加群だと思っても良い．

命題 3.12． $f : M \to M'$, $g : N \to N'$ を R 準同型写像とする．このとき，well-defined な R 準同型写像

$$M\otimes_R N \to M'\otimes_R N',\ \sum_{i=1}^{t} m_i\otimes n_i \mapsto \sum_{i=1}^{t} f(m_i)\otimes g(n_i)$$

が定まる．

証明． $\varphi : M\times N \to M\otimes_R N$, $(m,n)\mapsto m\otimes n$ が R 双線型写像であることから，

$$M\times N \to M'\otimes_R N',\ (m,n)\mapsto f(m)\otimes g(n)$$

も R 双線型写像となることが分かる．従って，定理 3.11(1) により欲しかった R 準同型写像

$$M\otimes_R N \to M'\otimes_R N',\ \sum_{i=1}^{t} m_i\otimes n_i \mapsto \sum_{i=1}^{t} f(m_i)\otimes g(n_i)$$

が定まる． ■

定義 3.13． 命題 3.12 で得られた R 準同型写像を $f\otimes g : M\otimes_R N \to M'\otimes_R N'$ と書く．

定義から容易に分かるように，$f' : M' \to M''$, $g' : N' \to N''$ に対して

$$(g'\otimes f')\circ(g\otimes f) = (g'\circ g)\otimes(f'\circ f)$$

が成り立つ．

例 3.14． (1) 0 でない整数 m に対して，$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} = 0$．

実際，$x+m\mathbb{Z}\in\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, q\in\mathbb{Q}$ に対して，

$$(x+m\mathbb{Z})\otimes q = (x+m\mathbb{Z})\otimes m\left(\frac{q}{m}\right) = (m(x+m\mathbb{Z}))\otimes\frac{q}{m} = 0\otimes\frac{q}{m} = 0$$

となるが，$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ の元は $(x+m\mathbb{Z})\otimes q$ の形の元で生成されるので，$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} = 0$ が示された．

(2) $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\cong\mathbb{Q}$ である．

実際，$\mathbb{Z}$ 双線型写像 $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, $(q,r)\mapsto qr$ を考えると，定理 3.11(1) より $\mathbb{Z}$ 準同型写像

$$f : \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\to\mathbb{Q},\ \sum_{i=1^t} q_i\otimes r_i \mapsto \sum_{i=1^t} q_i r_i$$

を得る．一方で，$\mathbb{Z}$ 準同型写像 $g : \mathbb{Q}\to\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$, $q\mapsto q\otimes 1$ を考えると，定義から $f\circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$ が分かる．ここで，$q = a/b, r = c/d\in\mathbb{Q}$ に対して，

$$q\otimes r = \frac{a}{b}\otimes\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd}\otimes\frac{c}{d} = \frac{a}{bd}\otimes\frac{dc}{d} = \frac{a}{bd}\otimes c = \frac{ac}{bd}\otimes 1 = qr\otimes 1$$

が成り立つ（3,5 個目の等号は $\otimes$ の双線型性より）．従って，

$$(g\circ f)(q\otimes r)=g(f(q\otimes r))=g(qr)=qr\otimes 1=q\otimes r$$

となるので，$g\circ f=\mathrm{id}_{\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}}$ が成り立つ．以上より，f は $\mathbb{Z}$ 同型写像．

(3) m,n を整数とし，$d=\mathrm{gcd}(m,n)$ と置く．このとき，

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

である（演習問題 3.7 参照）．

以下，加群のテンソル積の基本的な性質を述べる．証明の詳細は省いているので各自確かめよ．

命題 3.15. $L,M,N,M_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ を R 加群とする．このとき，

(1) $R\otimes_R M\cong M\cong M\otimes_R R$
(2) $(L\otimes_R M)\otimes_R N\cong L\otimes_R(M\otimes_R N)$
(3) $M\otimes_R N\cong N\otimes_R M$
(4) $\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda\right)\otimes_R N\cong\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(M_\lambda\otimes_R N)$

証明. (1) $R\otimes_R M\cong M$ を示す．$M\otimes_R R\cong M$ も同様に示される．R 準同型写像 $f:M\to R\otimes_R M,\ m\mapsto 1\otimes m$ を考える．$R\times M\to M,\ (a,m)\mapsto am$ は R 双線型写像であり，定理 3.11(1) より R 準同型写像

$$g:R\otimes_R M\to M,\ \sum_{i=1}^t a_i\otimes m_i\mapsto\sum_{i=1}^t a_im_i$$

が定まる．f と g た互いに逆写像であることは容易に確かめられる．

(2) N の元 n を固定し，R 双線型写像 $L\times M\to L\otimes_R(M\otimes_R N),\ (l,m)\mapsto l\otimes(m\otimes n)$ を考えると定理 3.11(1) より R 準同型写像

$$f_n:L\otimes_R M\to L\otimes_R(M\otimes_R N),\ \sum_{i=1}^t l_i\otimes m_i\mapsto\sum_{i=1}^t l_i\otimes(m_i\otimes n)$$

が定まる．さらに，この f_n を用いて R 双線型写像 $(L\otimes_R M)\times N\to L\otimes_R(M\otimes_R N),\ (\xi,n)\mapsto f_n(\xi)$ を定義すると，定理 3.11(1) より R 準同型写像

$$f:(L\otimes_R M)\otimes N\to L\otimes_R(M\otimes_R N),\ \sum_{i=1}^t(l_i\otimes m_i)\otimes n_i\mapsto\sum_{i=1}^t l_i\otimes(m_i\otimes n_i)$$

を得る．同様の議論で R 準同型写像

$$g:L\otimes_R(M\otimes N)\to(L\otimes_R M)\otimes_R N,\ \sum_{i=1}^t l_i\otimes(m_i\otimes n_i)\mapsto\sum_{i=1}^t(l_i\otimes m_i)\otimes n_i$$

が定義される．f と g が互いに逆写像であることは定義から容易に分かる．

(3) $M \times N \to N \otimes_R M,\ (m,n) \mapsto n \otimes m$ は R 双線型写像であり，定理 3.11(1) より R 準同型写像

$$f : M \otimes_R N \to N \otimes_R M,\ \sum_{i=1}^{t} m_i \otimes n_i \mapsto \sum_{i=1}^{t} n_i \otimes m_i$$

が定まる．同様の議論で R 準同型写像

$$g : N \otimes_R M \to M \otimes_R N,\ \sum_{i=1}^{t} n_i \otimes m_i \mapsto \sum_{i=1}^{t} m_i \otimes n_i$$

が定まる．f と g が互いに逆写像であることは定義から容易に分かる．

(4) $i_\lambda : M_\lambda \to \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ を $i_\lambda(m) = m\boldsymbol{e}_\lambda$ と定義する．このとき，R 準同型写像

$$f : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(M_\lambda \otimes_R N) \to \left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right) \otimes_R N,\ \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} \xi_\lambda\right)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto ((i_\lambda \otimes \mathsf{id}_N)(\xi_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$$

を得る（例えば $f((m_\lambda \otimes n)_{\lambda\in\Lambda}) = (m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \otimes n$）．一方で，$R$ 双線型写像

$$\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right) \times N \to \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(M_\lambda \otimes_R N),\ ((m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, n) \mapsto (m_\lambda \otimes n)_{\lambda\in\Lambda})$$

により R 準同型写像

$$g : \left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right) \otimes_R N \to \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(M_\lambda \otimes_R N),\ ((m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \otimes n) \mapsto (m_\lambda \otimes n)_{\lambda\in\Lambda})$$

が定まる．f と g が互いに逆写像なので，f は R 同型写像となる． ■

命題 3.16. L, M, N を R 加群とする．このとき，R 同型

$$\mathsf{Hom}_R(L \otimes_R M, N) \cong \mathsf{Hom}_R(L, \mathsf{Hom}_R(M, N))$$

が存在する．

証明. $\mathsf{Bil}_R(L, M; N)$ を R 双線型写像 $L \times M \to N$ 全体の集合で，Hom 加群と同様の R 加群構造を考えたものとする．このとき，定理 3.11(1) より R 同型

$$\mathsf{Hom}_R(L \otimes_R M, N) \xrightarrow{\cong} \mathsf{Bil}_R(L, M; N),\ f \mapsto f \circ \varphi$$

を得る．ここで，$\varphi : M \times N \to M \otimes_R N$ は $\varphi(m,n) = m \otimes n$ なる R 双線型写像．従って，R 同型

$$\mathsf{Bil}_R(L, M; N) \cong \mathsf{Hom}_R(L, \mathsf{Hom}_R(M, N))$$

を見つければ良い．

R 準同型写像 $\Phi : \mathsf{Bil}_R(L, M; N) \to \mathsf{Hom}_R(L, \mathsf{Hom}_R(M, N))$ を

$$(\Phi(f)(l))(m) := f(l, m) \quad (l \in L, m \in M, f \in \mathsf{Bil}_R(L, M; N))$$

で定義し，R 準同型写像 $\Psi : \mathsf{Hom}_R(L, \mathsf{Hom}_R(M, N)) \to \mathsf{Bil}_R(L, M; N)$ を

$$\Psi(f)(l, m) := (f(l))(m) \quad (l \in L, m \in M, f \in \mathsf{Hom}_R(L, \mathsf{Hom}_R(M, N)))$$

で定義する．このとき，Φ, Ψ は互いに逆写像を与えることが定義から分かる． ■

命題 3.17. M, N を自由 R 加群でそれぞれ基底 $\{m_i\}_{i\in I}, \{n_j\}_{j\in J}$ を持つとする．このとき，$M\otimes_R N$ は基底 $\{m_i \otimes n_j\}_{i\in I, j\in J}$ を持つ自由加群である．
特に，V, W が体 $\mathbb{F}$ 上のベクトル空間のとき，ベクトル空間の次元の等号

$$\dim_{\mathbb{F}}(V\otimes_{\mathbb{F}} W) = \dim_{\mathbb{F}}(V) + \dim_{\mathbb{F}}(W)$$

が成り立つ．

証明. $\{m_i\}_{i\in I}, \{n_j\}_{j\in J}$ がそれぞれ M, N を生成するので $\{m_i\otimes n_j\}_{i\in I, j\in J}$ は $M\otimes_R N$ を生成する．そこで，一次独立であることを確かめる．

$i'\in I, j'\in J$ に対して R 準同型写像 $\varphi_{i'}: M\to R, \psi_{j'}: N\to R$ を

$$\varphi_{i'}\left(\sum_{i\in I} a_i m_i\right) = a_{i'}$$
$$\psi_{j'}\left(\sum_{j\in J} b_j n_j\right) = b_{j'}$$

で定義する（$\{m_i\}_{i\in I}, \{n_j\}_{j\in J}$ が基底なのでこれらは well-defined）．このとき，R 準同型写像 $\varphi_{i'}\otimes\psi_{j'}: M\otimes_R N\to R\otimes_R R$ と $R\otimes_R R\cong R$ の合成として

$$\rho_{i'j'}: M\otimes_R N\to R\otimes_R R\xrightarrow{\cong} R,\ \sum_{i\in I, j\in J} a_{ij} m_i\otimes n_j \mapsto \sum_{i\in I, j\in J} a_{ij}\varphi_{i'}(m_i)\psi_{j'}(n_j) = a_{i'j'}$$

を得る．$\sum_{i\in I, j\in J} R m_i\otimes n_j$ の元 $\xi = \sum_{i\in I, j\in J} a_{ij} m_i\otimes n_j$ を考える．$\xi = 0$ のとき，任意の $i'\in I$ と $j'\in J$ に対して

$$a_{i'j'} = \rho_{i'j'}(\xi) = 0$$

が成り立つ．以上より，$\{m_i\otimes n_j\}_{i\in I, j\in J}$ が一次独立であることが示された． ■

演習問題

問題 3.1. m, n を整数，$d = \mathrm{gcd}(m, n)$ とする．このとき，

$$(0 :_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

を示せ．

問題 3.2. $\mathbb{F}$ を体，m, n を整数とする．このとき，

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[x]}(\mathbb{F}[x]/(x^m), \mathbb{F}[x]/(x^n)) \cong \mathbb{F}[x]/(x^{\min\{m,n\}})$$

を示せ．

問題 3.3. n を正の整数とする．

(1) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ x\mapsto nx$ を n 倍写像としたとき，$f^*: \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ が全射でないことを示せ．

(2) $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を自然な全射としたとき，$\pi_* : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ が全射でないことを示せ.

問題 3.4. R をネーター環，M, N を有限生成加群とする．このとき，$\mathrm{Hom}_R(M, N)$ が有限生成であることを示せ.

問題 3.5. （難）以下のようにして $\prod_{n\geq 0}\mathbb{Z}$ が自由加群でないことを示せ．ただし，I を無限集合としたときに $\prod_{i\in I}\mathbb{Z}$ と $\bigoplus_{n\geq 0}\mathbb{Z}$ の間に全単射は存在しないことは認めても良い（これは集合論的な理由から分かる：濃度が等しくない).

(1) $\prod_{n\geq 0}\mathbb{Z}$ の部分集合

$$X := \left\{ (a_n)_{n\geq 0} \in \prod_{n\geq 0}\mathbb{Z} \;\middle|\; 2^n | a_n \ (\forall n \geq 0) \right\}$$
$$Y := \left\{ (a_n)_{n\geq 0} \in \prod_{n\geq 0}\mathbb{Z} \;\middle|\; 3^n | a_n \ (\forall n \geq 0) \right\}$$

を考える．このとき，$X + Y = \prod_{n\geq 0}\mathbb{Z}$，つまり，$\prod_{n\geq 0}\mathbb{Z}$ の任意の元が X の元と Y の元の和で表せることを示せ.

ヒント：$\mathrm{gcd}(2^n, 3^n) = 1$ である

(2) $\varphi : \prod_{n\geq 0}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}$ 準同型で $\varphi\left(\bigoplus_{n\geq 0}\mathbb{Z}\right) = 0$ を満たすとする．このとき $\varphi = 0$ を示せ.

(3) (2) より単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\prod_{n\geq 0}\mathbb{Z}, \mathbb{Z}\right) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\bigoplus_{n\geq 0}\mathbb{Z}, \mathbb{Z}\right) \cong \prod_{n\geq 0}\mathbb{Z},\ \varphi \mapsto \varphi|_{\bigoplus_{n\geq 0}\mathbb{Z}} \mapsto (\varphi(\boldsymbol{e}_n))_{n\geq 0}$$

を得る（同型は 命題 3.4(1) より分かる)．この像が $\bigoplus_{n\geq 0}\mathbb{Z}$ であることを示せ.

(4) $\prod_{n\geq 0}\mathbb{Z}$ が自由加群でないことを示せ.

問題 3.6. 0 でない整数 m に対して $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_R \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$ を示せ.

問題 3.7. m, n を整数とし，$d = \mathrm{gcd}(m, n)$ と置く.

(1) 写像 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を

$$f(x) = (1 + m\mathbb{Z}) \otimes (x + n\mathbb{Z})$$

で定める．f が全射な $\mathbb{Z}$ 準同型写像であることを確かめよ.

(2) $d\mathbb{Z} \subseteq \mathrm{Ker}\, f$ を確かめよ.

ヒント：ユークリッドの互除法より $ms + nt = d$ となる整数 s, t が存在する.

(3) 写像

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z},\ (x + m\mathbb{Z}, y + n\mathbb{Z}) \mapsto xy + d\mathbb{Z}$$

が *well-defined* な $\mathbb{Z}$ 双線型写像であることを示せ.

(4) (3) で得られた $\mathbb{Z}$ 双線型写像に 定理 3.11(1) を用いて $\mathbb{Z}$ 双線型写像 $g : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ を得る. f が g の逆写像であることを示せ.

問題 3.8. 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ を表現行列とする $\mathbb{R}$ 線型写像

$$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}, \quad f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{x} \mapsto B\boldsymbol{x}$$

を考える. このとき, $\mathbb{R}$ 線型写像 $f_A \otimes f_B : \mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ の基底 $\{\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2\}$ に関する表現行列を求めよ.

問題 3.9. 命題 3.15, 命題 3.16 の証明の細部を埋めよ.

問題 3.10. M, N が有限生成 R 加群のとき, $M \otimes_R N$ も有限生成であることを示せ.

4 複体と完全列

この章を通して R は可換環とする．

4.1 可換図式

R 加群 L, M, N, X とその間の R 準同型写像 f, g, h, u からなる図式

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & M \arrow[dl, "g"] \\
& X &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[d, "g"] \\
N \arrow[r, "v"'] & X
\end{tikzcd}
$$

において，L から X へ至る道はそれぞれ

- $L \xrightarrow{h} X$, $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} X$
- $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} X$, $L \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} X$

の 2 通りあるが，どちらの道に沿った準同型写像の合成も等しい，つまり，それぞれ

- $g \circ f = h$
- $g \circ f = v \circ u$

が成り立つとき，この図式を**可換図式**という．このとき，

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\circlearrowleft"] & & M \arrow[dl, "g"] \\
& X &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[d, "g"] \\
N \arrow[r, "v"'] & X
\end{tikzcd}
$$

のように図式の中に丸い矢印を書いて表すことが多い．

もっと一般に，R 加群と R 準同型写像の図式が可換図式であるとは，任意の始点 M と終点 N に対して M から N への複数の道に沿った準同型写像の合成が全て等しいときに言う．通常四角形をつなげた図式を考えることが多いが，その場合は各四角形が可換図式であるときに可換図式となる．

例 4.1. (1) 図式

$$
\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & M_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & M_3 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi_3"'] & M_4 \arrow[d, "\varphi_4"'] \\
N_1 \arrow[r, "u"'] & N_2 \arrow[r, "v"'] & N_3 \arrow[r, "w"'] & N_4
\end{tikzcd}
$$

が可換図式

$\Longleftrightarrow \varphi_2 \circ f = u \circ \varphi_1,\ \varphi_3 \circ g = v \circ \varphi_2,\ \varphi_4 \circ h = w \circ \varphi_3$

(2) 図式

$$\begin{tikzcd}
L_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & L_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & L_3 \arrow[d, "\varphi_3"] \\
M_1 \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\psi_1"'] & M_2 \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\psi_2"'] & M_3 \arrow[d, "\psi_3"] \\
N_1 \arrow[r, "k"] & N_2 \arrow[r, "l"] & N_3
\end{tikzcd}$$

が可換図式

$\Longleftrightarrow \varphi_2 \circ f = u \circ \varphi_1,\ \varphi_3 \circ g = v \circ \varphi_2,\ \psi_2 \circ u = k \circ \psi_1,\ \psi_3 \circ v = l \circ \psi_2,$

例 4.2. A, B を n 次の複素正方行列，P を n 次の複素正則行列とする．このとき，

$$B = PAP^{-1} \Longleftrightarrow \begin{tikzcd}
\mathbb{C}^n \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "f_P"'] & \mathbb{C}^n \arrow[d, "f_P"] \\
\mathbb{C}^n \arrow[r, "f_B"'] & \mathbb{C}^n
\end{tikzcd} \text{が可換図式}$$

P を基底の変換行列だと思うと f_P は $\mathbb{C}^n$ の基底を別の基底に写す写像であり，上の可換図式は A という行列が基底の変換の元で B という行列で表されるということを意味している．

補題 4.3. 可換図式

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N_1 \arrow[d, "v"] \\
M_2 \arrow[r, "f_2"'] & N_2
\end{tikzcd}$$

を考える．このとき，well-defined な R 準同型写像

$$f_1' : \mathsf{Ker}\, u \to \mathsf{Ker}\, v,\ x \mapsto f_1(x)$$
$$\overline{f_2} : \mathsf{Coker}\, u \to \mathsf{Coker}\, v,\ x + \mathsf{Im}\, u \mapsto f_2(x) + \mathsf{Im}\, v$$

を得る．

証明. f_1' について：

$m \in \mathsf{Ker}\, u$ に対して，図式の可換性より $v(f_1(m)) = f_2(u(m)) = f_2(0) = 0$ となる．従って，well-defined な写像 $f_1' : \mathsf{Ker}\, u \to \mathsf{Ker}\, v,\ m \mapsto f_1(m)$ が定まる．f_1' は単に f_1 の定義域と値域を制限しただけなので，R 準同型写像となる．

$\overline{f_2}$ について：

f_2 と自然な全射 $\pi : N_2 \to \mathsf{Coker}\, v = N_2/\mathsf{Im}\, v$ の合成写像 $\pi \circ f_2 : N_2 \to \mathsf{Coker}\, v$ を考える．$m \in M_1$ に対して，図式の可換性より $(\pi \circ f_2)(u(m)) = \pi(v(f_1(m))) = 0$．従って，定理 2.12(1) を $\pi \circ f_2$ に用いること

で，well-defined な R 準同型写像

$$\overline{f_2} : \mathsf{Coker}\, u \to \mathsf{Coker}\, v,\ m + \mathsf{Im}\, u \mapsto f_2(m) + \mathsf{Im}\, v$$

を得る． ■

4.2 全射と単射

R 準同型写像の単射性および全射性は R 加群の元を用いて定義されていたが，これらを R 準同型写像のみを用いて述べることもできる．

補題 4.4. $f : M \to N$ を R 準同型写像とする．

(1) 次の 2 条件は同値である：
- (a) f が単射
- (b) 任意の R 加群 K と R 準同型写像 $g, g' : K \to M$ に対して，

$$f \circ g = f \circ g' \Longrightarrow g = g'$$

  が成立する．
- (c) 任意の R 加群 K に対して，R 準同型写像

$$f_* : \mathsf{Hom}_R(K, M) \to \mathsf{Hom}_R(K, N)$$

  は単射．

(2) 次の 2 条件は同値である：
- (a) f が全射
- (b) 任意の R 加群 C と R 準同型写像 $h, h' : N \to C$ に対して，

$$h \circ f = h \circ f \Longrightarrow h = h'$$

  が成立する．
- (c) 任意の R 加群 K に対して，R 準同型写像

$$f^* : \mathsf{Hom}_R(N, C) \to \mathsf{Hom}_R(M, C)$$

  は単射．

証明. (1) (b)$\Leftrightarrow$(c) は単射性の言い換えである．従って，(a)$\Leftrightarrow$(b) を示す．

(a)$\Rightarrow$(b)：

$f \circ g = f \circ g'$ とする．任意の $k \in K$ に対して $f(g(k)) = (f \circ g)(k) = (f \circ g')(k) = f(g'(k))$ が成り立つが，f が単射なので $g(k) = g'(k)$ となる．従って，$g = g'$．

(b)$\Rightarrow$(a)：

$K = \mathsf{Ker}\, f$ とし，包含写像 $i : K \to M$ および零写像 $0 : K \to M$ を考える（cf. 例 2.11(3)(4)）．このとき，$f \circ i = 0 = f \circ 0$ が成り立つので，仮定 (b) より $i = 0$ となる．従って $\mathsf{Ker}\, f = 0$ が成り立ち，f は単射で

ある．

(2) (b)⇔(c) は単射性の言い換えである．従って，(a)⇔(b) を示す．

(a)⇒(b)：

$h \circ f = h' \circ f$ とする．任意の $n \in N$ に対して，f が全射であることから $n = f(m)$ となる $m \in M$ が存在する．このとき，$h(n) = h(f(m)) = (h \circ f)(m) = (h' \circ f)(m) = h'(f(m)) = h'(n)$ が成り立つ．従って，$h = h'$．

(b)⇒(a)：

剰余加群 $C = \mathsf{Coker}\, f$ と自然な全射 $\pi : N \to C$ および零写像 $0 : N \to C$ を考える．このとき，$\pi \circ f = 0 = 0 \circ f$ が成り立つので，仮定 (b) より $\pi = 0$ となる．従って $\mathsf{Coker}\, f = 0$ が成り立ち，f は全射である． ■

4.3 核，像，余核

R 準同型写像 $f : M \to N$ に対して，包含写像 $i_f : \mathsf{Ker}\, f \to M,\ m \mapsto m$ および自然な全射 $\pi_f : N \to \mathsf{Coker}\, f,\ n \mapsto n + \mathsf{Im}\, f$ を考える．このとき，

$$f \circ i_f = 0, \quad \pi_f \circ f = 0$$

が成り立つ．

補題 4.5. $f : M \to N$ を R 加群の準同型とする．

(1) (i) 任意の R 準同型 $g : X \to M$ に対して，

$$f \circ g = 0 \Longleftrightarrow \exists \overline{g} : X \to \mathsf{Ker}\, f \text{ s.t. } i_f \circ \overline{g} = g$$

さらに，これを満たすような $\overline{g}$ はただ一つ．

(ii) R 加群 K と R 準同型写像 $i : K \to M$ が条件

> R 準同型写像 $g : X \to M$ が $f \circ g = 0$ を満たすとき，$i \circ \overline{g} = g$ を満たすような R 準同型写像 $\overline{g} : X \to K$ がただ一つ存在する．

を満たすとする．このとき，R 同型写像 $\theta : K \cong \mathsf{Ker}\, f$ で $i_f \circ \theta = i$ を満たすものがただ一つ存在する．

(2) (i) 任意の任意の R 準同型 $h : N \to X$ に対して，

$$h \circ f = 0 \Longleftrightarrow \exists \overline{h} : \mathsf{Coker}\, f \to X \text{ s.t. } \overline{h} \circ \pi_f = h$$

さらに，これを満たすような $\overline{h}$ はただ一つ．

(ii) R 加群 C と R 準同型写像 $\pi : N \to C$ が条件

> R 準同型写像 $h : N \to X$ が $h \circ f = 0$ を満たすとき，$\overline{h} \circ \pi = h$ を満たすような R 準同型写像 $\overline{h} : C \to X$ がただ一つ存在する．

を満たすとする．このとき，R 同型写像 $\theta : C \cong \mathsf{Coker}\, f$ で $\theta \circ \pi_f = \pi$ を満たすものがただ一つ存在する．

証明. (1) ($\Longrightarrow$) $f \circ g = 0$ より，任意の $x \in X$ に対して $f(g(x)) = (f \circ g)(x) = 0$ となるので $g(x) \in \mathsf{Ker}\, f$. よって，写像 $\overline{g} : X \to \mathsf{Ker}\, f,\ x \mapsto g(x)$ が定まり．定義より $i \circ \overline{g} = g$.
($\Longleftarrow$) $f \circ i = 0$ なので，$f \circ g = f \circ (i \circ \overline{g}) = (f \circ i) \circ \overline{g} = 0 \circ \overline{g} = 0$.

このような $\overline{g}$ がただ一つしかないことは i_f が単射であることと補題 4.4 より分かる．

(2) ($\Longrightarrow$) $h \circ f = 0$ より任意の $m \in M$ に対して $h(f(m)) = (h \circ f)(m) = 0$ となり，$f(m) \in \mathsf{Ker}\, h$. 従って，定理 2.12(4) より well-defined な R 準同型写像

$$\overline{h} : \mathsf{Coker}\, f := N/\,\mathsf{Im}\, f \to X,\ n + \mathsf{Im}\, f \mapsto h(n)$$

が定まる．このとき，任意の $n \in N$ に対して $(\overline{h} \circ \pi)(n) = \overline{h}(\pi(n)) = \overline{h}(n + \mathsf{Im}\, f) = h(n)$ が成り立つので，$\overline{h} \circ \pi = h$ となる．
($\Longleftarrow$) $\pi \circ f = 0$ なので，$h \circ f = (\overline{h} \circ \pi) \circ f = \overline{h} \circ (\pi \circ f) = \overline{h} \circ 0 = 0$.

このような $\overline{h}$ がただ一つしかないことは π_f が全射であることと補題 4.4 より分かる． ■

4.4 鎖複体

この節で導入される鎖複体とそのホモロジー加群はその名の通りホモロジー代数において中心的な役割を果たす．

補題 4.6. R 加群 L, M, N と R 準同型写像 $f : L \to M, g : M \to N$ を考える．このとき，

$$g \circ f = 0 \Longleftrightarrow \mathsf{Im}\, f \subseteq \mathsf{Ker}\, g$$

が成り立つ．

証明. ($\Longrightarrow$)：任意の $m \in \mathsf{Im}\, f$ はある $l \in L$ を用いて $m = f(l)$ と表せる．このとき，$g(m) = g(f(l)) = (g \circ f)(l) = 0$ となるので $m \in \mathsf{Ker}\, g$. 従って，$\mathsf{Im}\, f \subseteq \mathsf{Ker}\, g$ が示された．

($\Longleftarrow$)：任意の $l \in L$ に対して $f(l) \in \mathsf{Im}\, f \subseteq \mathsf{Ker}\, g$ となるので，$(g \circ f)(l) = g(f(l)) = 0$ が成り立つ．よって，$g \circ f = 0$ が示された． ■

定義 4.7. (1) R 加群と R 準同型写像の列 $(X_\bullet, d_\bullet^X)$

$$(X_\bullet, d_\bullet^X) := (\cdots \to X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}^X} X_n \xrightarrow{d_n^X} X_{n-1} \to \cdots)$$

が**鎖複体（chain complex）**であるとは，任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$d_n^X \circ d_{n+1}^X = 0 \quad (\overset{\text{補題 4.5}}{\Longleftrightarrow} \mathsf{Im}\, d_{n+1}^X \subseteq \mathsf{Ker}\, d_n^X)$$

が成り立つときに言う．以後，鎖複体 $(X_\bullet, d_\bullet^X)$ は単に $X_\bullet$ と書くことにする．また，d_n^X の X も誤

解のおそれがない場合は省略する．

(2) 鎖複体 $X_\bullet$ に対して，

$$\mathsf{H}_n(X_\bullet) := \mathsf{Ker}\, d_n^X \,/\, \mathsf{Im}\, d_{n+1}^X$$

を $X_\bullet$ の n **番目のホモロジー加群（nth homology module）**と呼ぶ．

(3) $X_\bullet, Y_\bullet$ を鎖複体とする．$X_\bullet$ から $Y_\bullet$ への**鎖写像（chain map）**$f_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ とは，R 準同型写像の列

$$f_n : X_n \to Y_n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

であり，任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$f_n \circ d_{n+1}^X = d_{n+1}^Y \circ f_{n+1}$$

が成り立つようなものである．つまり，以下の図式が可換図式になることを意味する：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}^X"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_n \arrow[r, "d_n^X"] \arrow[d, "f_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}^Y"'] & Y_n \arrow[r, "d_n^Y"'] & Y_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

注意．鎖複体に現れる加群が途中から全て 0 になるとき，その部分を以下のように省略して書くことが多い：

$$\begin{gathered}
0 \to M_n \to M_{n-1} \to M_{n-2} \to \cdots \\
\cdots \to M_{n+2} \to M_{n+1} \to M_n \to 0 \\
0 \to M_m \to M_{n+1} \to \cdots \to M_{n+1} \to M_n \to 0
\end{gathered}$$

例 4.8. (1) M, N を R 加群，$f : M \to N$ を R 準同型写像とする．

- $X_\bullet := (0 \to \overset{0}{M} \to 0)$ は鎖複体であり，

$$\mathsf{H}_n(X_\bullet) \cong \begin{cases} M & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$

- $Y_\bullet := (0 \to \overset{0}{M} \xrightarrow{f} \overset{-1}{N} \to 0)$ は鎖複体であり，

$$\mathsf{H}_n(X_\bullet) \cong \begin{cases} \mathsf{Ker}\, f & (n = 0) \\ \mathsf{Coker}\, f & (n = -1) \\ 0 & (n \neq 0, -1) \end{cases}$$

(2) $R = \mathbb{Z}$ とする．このとき，

$$X_\bullet := (\cdots \to \overset{n+1}{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \xrightarrow{\times 2} \overset{n}{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \xrightarrow{\times 2} \overset{n-1}{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \xrightarrow{\times 2} \to \cdots)$$

は鎖複体となり，

$$\mathsf{H}_n(X_\bullet) = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{Z}).$$

(3) R を環，$x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ とする．このとき，

$$K_\bullet := (0 \to K_n \xrightarrow{d_n} K_{n-1} \to \cdots \to K_1 \xrightarrow{d_1} K_0 \to 0)$$

を以下のように定める：

- $K_t := R^{\binom{n}{t}}$ とする．これは $I := \{\{i_1, \ldots, i_t\} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_t \leq n\}$ を添字集合にもつ自由加群と考えることができる．従って，単位ベクトルの集まり $\{\boldsymbol{e}_{i_1,\ldots,i_t}\}_{i_1<i_2<\cdots<i_t}$ を基底に持つ．
- $d_t : K_t \to K_{t-1}$ を

$$\begin{aligned} d_t(\boldsymbol{e}_{i_1,\ldots,i_t}) &:= \sum_{j=1}^{t} (-1)^j x_{i_j} \boldsymbol{e}_{i_1,\ldots,i_{j-1},i_{j+1},i_t} \\ &= -x_{i_1}\boldsymbol{e}_{i_2,\ldots,i_t} + x_{i_2}\boldsymbol{e}_{i_1,i_3,\ldots,i_t} + \cdots + (-1)^t x_{i_t}\boldsymbol{e}_{i_1,\ldots,i_{t-1}} \end{aligned}$$

で定義する．例えば，

$$d_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : R^n \to R$$
$$d_n = \begin{pmatrix} (-1)^n x_n \\ (-1)^{n-1} x_{n-1} \\ \vdots \\ -x_1 \end{pmatrix} : R \to R^n$$

このとき，$K_\bullet$ は鎖複体となる．これを $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の **Koszul 複体**[a]と呼ぶ．

$n = 2$ のとき，

$$K_\bullet = (0 \to \overset{2}{R} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}} \overset{1}{R^2} \xrightarrow{(x_1, x_2)} \overset{0}{R} \to 0)$$

$n = 3$ のとき，

$$K_\bullet = (0 \to \overset{3}{R} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -x_3 \\ x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}} \overset{2}{R^3} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2 & x_3 & 0 \\ -x_1 & 0 & x_3 \\ 0 & -x_1 & -x_2 \end{pmatrix}} \overset{1}{R^3} \xrightarrow{(x_1, x_2, x_3)} \overset{0}{R} \to 0)$$

Koszul 複体 $K_\bullet$ のホモロジー加群の消滅は可換環論で重要な役割を果たす**正則列**の概念と密接な関わりがある：

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ が正則列} \Longrightarrow \mathsf{H}_i(K_\bullet) = 0 \ (i \neq 0)$$

R がただ一つの極大イデアルを持ち，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ がその極大イデアルの元ならば $\Longleftarrow$ も正しい．

(4) D を $\mathbb{R}^2$ 内の領域とする．このとき，

$$C^\infty(D) := \{ f : D \to \mathbb{R} \mid f \text{ は } C^\infty \text{ 級関数} \}$$

は関数の和と積で環となる．このとき，

$$X_\bullet := (0 \to \overset{0}{C^\infty(D)} \xrightarrow{d_0} \overset{-1}{C^\infty(D)^2} \xrightarrow{d_{-1}} \overset{-2}{C^\infty(D)} \to 0)$$
$$d_0(f) := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$d_{-1}(f,g) := \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$$

は鎖複体となる．実際，

$$d_{-1} \circ d_0(f) = d_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

(f が C^∞ 級なので偏微分の順序を入れ替えても結果は変わらない)

となるので $d_{-1} \circ d_0 = 0$.

$D = \mathbb{R}^2$ の場合：

- $\mathsf{H}_0(X_\bullet) \cong \mathsf{Ker}\, d_0 = \left\{ f \;\middle|\; \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \right\} = \{f \mid f = const.\} \cong \mathbb{R}$
- $\mathsf{H}_{-1}(X_\bullet) = 0$ $(\Longleftrightarrow \mathsf{Ker}\, d_{-1} = \mathsf{Im}\, d_0)$

  ($\because$)

  $(f,g) \in \mathsf{Ker}\, d_{-1}$，つまり，$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}$ とする．このとき，$h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ を

$$h(x,y) = \int_0^x f(t,0)\,dt + \int_0^y g(x,t)\,dt$$

  と定めると，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= f(x,0) + \int_0^y \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dt \\
&= f(x,0) + \int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dt \\
&= f(x,0) + [f(x,t)]_0^y \\
&= f(x,0) + f(x,y) - f(x,0) \\
&= f(x,y) \\
\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) &= g(x,y)
\end{aligned}$$

  となるので $(f,g) = d_0(h) \in \mathsf{Im}\, d_0$.
- $\mathsf{H}_{-2}(X_\bullet) = 0$ $(\Longleftrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2) = \mathsf{Im}\, d_0)$

  ($\because$)

  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ とする．このとき，$h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ を

$$h(x,y) := -\int_0^y f(x,t)\,dt$$

  と定めると，

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = -f(x,y)$$

となるので，$d_{-1}(h,0)=0-\dfrac{\partial h}{\partial y}=f$.

もっと一般に，$\mathbb{R}^n$ 内の領域に対して $C^\infty(D)$ は可換環となり，鎖複体

$$0\to \overset{0}{C^\infty(D)}\xrightarrow{d_0}\overset{-1}{C^\infty(D)^{\binom{n}{1}}}\xrightarrow{d_{-1}}\cdots\to \overset{-n+1}{C^\infty(D)^{\binom{n}{n-1}}}\xrightarrow{d_{-n+1}}\overset{-n}{C^\infty(D)}\to 0$$

が定義できる．ここで，(3) と同様に，$C^\infty(D)^{\binom{n}{t}}$ は $\{\boldsymbol{e}_{i_1,\ldots,i_t}\}_{i_1<i_2<\cdots<i_t}$ を基底にもつ自由加群．このとき，$d_{-t}:C^\infty(D)^{\binom{n}{t}}\to C^\infty(D)^{\binom{n}{t+1}}$ は

$$d_{-t}(f\boldsymbol{e}_{i_1,\ldots,i_t})_{j_1,j_2,\ldots,j_{t+1}}=\sum_{j=1}^{n}\mathsf{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_t & j\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_t & j_{t+1}\end{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

で定義される．ここで，sgn の部分は $\{i_1,i_2,\ldots,i_t,j\}=\{j_1,j_2,\ldots,j_{t+1}\}$ の場合は置換の符号，それ以外の場合は 0 である．このように定義される複体を **de Rham 複体**[b] と呼ぶ．

$n=3$ のとき，

$$0\to \overset{0}{C^\infty(D)}\xrightarrow{\mathsf{grad}}\overset{-1}{C^\infty(D)^3}\xrightarrow{\mathsf{rot}}\overset{-2}{C^\infty(D)^3}\xrightarrow{\mathsf{div}}\overset{-3}{C^\infty(D)}\to 0$$

である．

de Rham 複体 $X_\bullet$ のホモロジー加群は領域 D の穴の有無と密接な関わりがある：誤解を恐れずに言えば，

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{H}_k(X_\bullet))\text{``}=\text{''}k\text{ 次元の穴の数}$$

[a] Koszul（人）：コスツール，コシュール，コズール

[b] de Rham（人）：ド・ラーム

4.5 完全列

例 4.8 が示すように，複体のホモロジー加群は複体から本質的な情報を取り出したものだと考える事ができる．特に，ホモロジー加群が消えるかどうかは様々な文脈において重要な意味を持つことが多い．この節ではホモロジーが消える複体，もっと一般に完全列と呼ばれるものについて基本事項を述べる．

定義 4.9. R 加群と R 準同型の列

$$X_n\xrightarrow{d_n}X_{n-1}\xrightarrow{d_{n-1}}\cdots\xrightarrow{d_2}X_1\xrightarrow{d_1}X_0$$

を考える．$0<i<n$ に対して，この列が X_i で**完全**（**exact**）であるとは

$$\mathsf{Ker}\,d_i=\mathsf{Im}\,d_{i+1}$$

が成り立つときに言う．また，全ての $0<i<n$ に対して X_i が完全であるとき，この列を**完全列**（**exact sequence**）という．

同様に，R 加群の鎖複体 $X_\bullet$ に対して以下のように定義する：

- $X_\bullet$ が X_i で完全である

  $:\Longleftrightarrow \operatorname{Ker} d_i = \operatorname{Im} d_{i+1}$

  $\Longleftrightarrow \mathsf{H}_i(X_\bullet) = 0$
- $X_\bullet$ が**完全複体（exact complex）**である

  $:\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z},\ \operatorname{Ker} d_i = \operatorname{Im} d_{i+1}$

  $\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z},\ \mathsf{H}_i(X_\bullet) = 0$

命題 4.10. $f : M \to N$ を R 準同型とする．

(1) $M \xrightarrow{f} N \to 0$ が完全列 $\Longleftrightarrow$ f が全射

(2) $0 \to M \xrightarrow{f} N$ が完全 $\Longleftrightarrow$ f が単射

(3) $0 \to M \xrightarrow{f} N \to 0$ が完全 $\Longleftrightarrow$ f が全単射

証明. (1) $M \xrightarrow{f} N \to 0$ が（N で）完全 $\Longleftrightarrow \operatorname{Coker} f = 0 \Longleftrightarrow f$ が全射

(2) $0 \to M \xrightarrow{f} N$ が（M で）完全 $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f = 0 \Longleftrightarrow f$ が単射

(3) は (1) と (2) より従う． ■

命題 4.11. $f : M \to N$ を R 準同型とする．

(1) $0 \to K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N$ の形の完全列が存在する $\Longleftrightarrow K \cong \operatorname{Ker} f$

(2) $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} C \to 0$ の形の完全列が存在する $\Longleftrightarrow C \cong \operatorname{Coker} f$

証明. (1)($\Rightarrow$) M で完全なので $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} i$．$K$ で完全なので i は単射となり，$\operatorname{Im} i \cong K$．
($\Leftarrow$) $0 \to \operatorname{Ker} f \xrightarrow{i_f} M \xrightarrow{f} N$ が完全列となる．

(2)($\Rightarrow$) N で完全なので $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} \pi$．$C$ で完全なので π は全射となり，準同型定理より $\operatorname{Coker} f = N/\operatorname{Im} f = N/\operatorname{Ker} \pi \cong C$．
($\Leftarrow$) $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi_f} \operatorname{Coker} f \to 0$ が完全列となる． ■

定義 4.12. $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ の形の完全列を特に**短完全列（short exact sequence）**と呼ぶ．

このとき，命題 4.11 より

$$L \cong \operatorname{Ker} g, \quad N \cong \operatorname{Coker} f$$

が成り立つ．

以下の命題は有限次元ベクトル空間の複体の情報とホモロジー加群の情報を結びつける役割を果たす．

命題 4.13. $\mathbb{F}$ を体とする．有限次元 $\mathbb{F}$ ベクトル空間の鎖複体

$$X_\bullet = (0 \to X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \to 0)$$

を考える．このとき，

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{H}_k(X_\bullet)) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim_{\mathbb{F}}(X_k)$$

が成り立つ．

証明. 最初に，$\mathbb{F}$ ベクトル空間の短完全列

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

に対して

$$\dim_{\mathbb{F}}(M) = \dim_{\mathbb{F}}(L) + \dim_{\mathbb{F}}(N)$$

が成り立つ（線形代数で出てきた次元定理 $\dim_{\mathbb{F}}(M) = \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Ker}\, g) + \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Im}\, g)$ から分かる）．

番号 k に対して，以下の短完全列を考える

$$0 \to \mathsf{Im}\, d_{k+1} \xrightarrow{\subseteq} \mathsf{Ker}\, d_k \to \mathsf{H}_k(X_\bullet) \to 0$$
$$0 \to \mathsf{Ker}\, d_k \xrightarrow{\subseteq} X_k \to X_k / \mathsf{Ker}\, d_k \to 0.$$

これらと準同型定理を用いて得られる同型 $X_k / \mathsf{Ker}\, d_k \cong \mathsf{Im}\, d_k$ により

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Ker}\, d_k) = \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Im}\, d_{k+1}) + \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{H}_k(X_\bullet))$$
$$\dim_{\mathbb{F}}(X_k) = \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Ker}\, d_k) + \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Im}\, d_k)$$

を得る．これらを用いることで

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{H}_k(X_\bullet)) = \dim_{\mathbb{F}}(X_k) - l_k - l_{k+1} \tag{$*$}$$

を得る．ここで，$l_k := \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Im}\, d_k)$ と置いた．$d_0 = 0, d_{n+1} = 0$ より $l_0 = l_{n+1} = 0$ となることに注意すると，$(*)$ により

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{H}_k(X_\bullet)) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim_{\mathbb{F}}(X_k) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (l_k + l_{k+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim_{\mathbb{F}}(X_k) - (l_0 + (-1)^k l_{n+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim_{\mathbb{F}}(X_k)
\end{aligned}$$

を得る． ■

以下の主張はホモロジー代数学における最も重要なものの一つであり，これを用いることで準同型写像の核，余核，像や複体のホモロジーについて様々なことが分かる．

定理 4.14 (蛇の補題（Snake Lemma）)**.** 以下の R 加群と R 準同型写像の図式

$$\begin{tikzcd} & L_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N_1 \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L_2 \arrow[r, "f_2"'] & M_2 \arrow[r, "g_2"'] & N_2 & \end{tikzcd}$$

が可換図式であり，上下の列が完全列であるとする．このとき，完全列

$$\mathrm{Ker}\, u \xrightarrow{f_1'} \mathrm{Ker}\, v \xrightarrow{g_1'} \mathrm{Ker}\, w \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\, u \xrightarrow{\overline{f_2}} \mathrm{Coker}\, v \xrightarrow{\overline{g_2}} \mathrm{Coker}\, w$$

が存在する．ただし，$f_1', g_1', \overline{f_2}, \overline{g_2}$ は補題 4.3 で得られるもの．

証明. まず δ の定義を述べる．$n \in \mathrm{Ker}\, w$ を考える．g_1 が全射なので，$n = g_1(m)$ となる $m \in M_1$ が存在する．このとき，$g_2(v(m)) = w(g_1(m)) = w(n) = 0$ より $v(m) \in \mathrm{Ker}\, g_2 = \mathrm{Im}\, f_2$ となる．従って，$v(m) = f_2(l)$ となる $l \in L_2$ が存在する．このとき，

$$\delta(n) := l + \mathrm{Im}\, u \in \mathrm{Coker}\, u$$

と定義する．

<u>δ の well-defined 性</u>：

$m' \in M_1, l' \in L_2$ を $n = g_1(m'), v(m') = f_2(l')$ となるようなものとする．$g_1(m-m') = g_1(m)-g_1(m') = n - n = 0$ より $m - m' \in \mathrm{Ker}\, g_1 = \mathrm{Im}\, f_1$ となる．ある $s \in L_1$ を用いて $m - m' = f_1(s)$ と表すと，

$$f_2(l - l') = f_2(l) - f_2(l') = v(m) - v(m') = v(m - m') = v(f_1(s)) = f_2(u(s))$$

となり，f_2 は単射なので $l - l' = u(s) \in \mathrm{Im}\, u$ が成り立つ．従って，$l + \mathrm{Im}\, u = l' + \mathrm{Im}\, u$ となり，$\delta(n)$ が well-defined であることが示された．

<u>δ が R 準同型であること</u>：

$x, x' \in \mathrm{Ker}\, w$ とし，

$$\begin{aligned} \delta(n) &= l + \mathrm{Im}\, u \quad (n = g_1(m), v(m) = f_2(l)) \\ \delta(n') &= l' + \mathrm{Im}\, u \quad (n' = g_1(m'), v(m') = f_2(l')) \end{aligned}$$

と表す．このとき，$n + n' = g_1(m + m')$, $v(m + m') = f_2(l + l')$ なので，

$$\delta(n + n') = (l + l') + \mathrm{Im}\, u = (l + \mathrm{Im}\, u) + (l' + \mathrm{Im}\, u) = \delta(n) + \delta(n')$$

が成り立つ．また，$r \in R$ に対して $rn = g_1(rm)$, $v(rm) = f_2(rl)$ なので，

$$\delta(rn) = rl + \mathrm{Im}\, u = r(l + \mathrm{Im}\, u) = r\delta(n)$$

が成り立つ．

以下，主張で与えられた列の完全性を示していく．

- $\operatorname{Ker} v$ での完全性：
  $g_1 \circ f_1 = 0$ より $\operatorname{Im} f_1' \subseteq \operatorname{Ker} g_1'$ が成り立つので，逆の包含 $\operatorname{Ker} g_1' \subseteq \operatorname{Im} f_1'$ を示す．
  $m \in \operatorname{Ker} v$ が $g_1'(m) = 0$ を満たすとする．このとき，g_1' の定義から $g_1(m) = 0$ である．従って，M_1 における完全性から $m = f_1(l)$ を満たす $l \in L_1$ が存在する．ここで，$f_2(u(l)) = v(f_1(l)) = v(m) = 0$ かつ f_2 が単射なので $u(l) = 0$．よって，$l \in \operatorname{Ker} u$ かつ $f_1'(l) = f_1(l) = m$ が成り立つ．

- $\operatorname{Coker} v$ での完全性：
  $g_2 \circ f_2 = 0$ より $\operatorname{Im} \overline{f_2} \subseteq \operatorname{Ker} \overline{g_2}$ が成り立つので，逆の包含 $\operatorname{Ker} \overline{g_2} \subseteq \operatorname{Im} \overline{f_2}$ を示す．
  $m + \operatorname{Im} v \in \operatorname{Coker} v$ が $\overline{g_2}(m + \operatorname{Im} v) = 0$ を満たすとする．このとき，$\overline{g_2}$ の定義から $g_2(m) + \operatorname{Im} w = 0$ つまり $g_2(m) \in \operatorname{Im} w$ となる．従って，$g_2(m) = w(n)$ を満たす $n \in N_1$ が存在する．また，g_1 が全射なので $n = g_1(m')$ を満たす $m' \in M_1$ が存在する．図式の可換性より $g_2(m) = w(n) = w(g_1(m')) = g_2(v(m'))$ となり，$m - v(m') \in \operatorname{Ker} g_2 = \operatorname{Im} f_2$ である．よって，$m - v(m) = f_2(l)$ なる $l \in L_2$ が存在する．すると，
  $$m + \operatorname{Im} v = (m - v(m)) + \operatorname{Im} v = f_2(l) + \operatorname{Im} v = \overline{f_2}(l + \operatorname{Im} u) \in \operatorname{Im} \overline{f_2}$$
  が成り立つ．

- $\operatorname{Ker} w$ での完全性：
  $m \in \operatorname{Ker} v$ とする．定義より $v(m) = f_2(l)$ なる $l \in L_2$ を取ったとき，$\delta(g_1'(m)) = l + \operatorname{Im} u$ である．いま，m は $\operatorname{Ker} v$ の元なので $f_2(l) = v(m) = 0$ となる．f_2 が単射であることから $l = 0$ となり，$\delta(g_1'(m)) = 0$ が示される．以上より，$\operatorname{Im} g_1' \subseteq \operatorname{Ker} \delta$ が分かった．そこで，逆の包含 $\operatorname{Ker} \delta \subseteq \operatorname{Im} g_1'$ を示す．
  $n \in \operatorname{Ker} \delta$ とする．$n = g_1(m)$ なる $m \in M_1$ と $v(m) = f_2(l)$ なる $l \in L_2$ を取ったとき
  $$l + \operatorname{Im} u = \delta(n) = 0,$$
  つまり，$l \in \operatorname{Im} u$ となる．そこで $l = u(a)$ $(a \in L_1)$ と表す．このとき，図式の可換性より $v(m) = f_2(u(a)) = v(f_1(a))$ となり，$m - f_1(a) \in \operatorname{Ker} v$ となる．従って，$g_1'(m - f_1(a)) = g_1(m - f_1(a)) = g_1(m) = n$ となり，$m \in \operatorname{Im} g_1'$ が示された．

- $\operatorname{Coker} u$ での完全性：
  $n \in \operatorname{Ker} w$ とする．$\delta(n)$ は $n = g_1(m)$ なる $m \in M_1$ と $v(m) = f_2(l)$ なる $l \in L_2$ を取ったとき
  $$\delta(n) = l + \operatorname{Im} u$$
  と定義されている．ここで，$\overline{f_2}(\delta(n)) = f_2(l) + \operatorname{Im} v = v(m) + \operatorname{Im} v = 0$ となるので $\delta(n) \in \operatorname{Ker} \overline{f_2}$ となる．以上より，$\operatorname{Im} \delta \subseteq \operatorname{Ker} \overline{f_2}$ が分かった．そこで，逆の包含 $\operatorname{Ker} \overline{f_2} \subseteq \operatorname{Im} \delta$ を示す．
  $l + \operatorname{Im} u \in \operatorname{Ker} \overline{f_2}$ とする．$f_2(l) + \operatorname{Im} v = \overline{f_2}(l + \operatorname{Im} u) = 0$ より $f_2(l) = v(m)$ $(m \in M_1)$ と表せる．図式の可換性より $w(g_1(m)) = g_2(v(m)) = g_2(f_2(l)) = 0$ となり，$g_1(m) \in \operatorname{Ker} w$．このとき，$v(m) = f_2(l)$ なので δ の定義より $\delta(g_1(m)) = l + \operatorname{Im} u$ となる．従って，逆の包含 $\operatorname{Ker} \overline{f_2} \subseteq \operatorname{Im} \delta$ も示された．

■

定理 4.15 (ホモロジー長完全列). $X_\bullet$, $Y_\bullet$, $Z_\bullet$ を鎖複体とし，$f_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$, $g_\bullet : Y_\bullet \to Z_\bullet$ を鎖写像とする．さらに，全ての $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$0 \to X_n \xrightarrow{f_n} Y_n \xrightarrow{g_n} Z_n \to 0$$

が完全列であるとする．このとき，完全列

$$\cdots \to \mathsf{H}_{n+1}(Z_\bullet) \xrightarrow{\delta_{n+1}} \mathsf{H}_n(X_\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}_n(f_\bullet)} \mathsf{H}_n(Y_\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}_n(g_\bullet)} \mathsf{H}_n(Z_\bullet) \xrightarrow{\delta_n} \mathsf{H}_{n-1}(X_\bullet) \to \cdots$$

が存在する．

証明. 可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d_n^X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y_{n+1} \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "d_n^Y"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_n \arrow[r] \arrow[d, "d_n^Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"'] & Y_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"'] & Z_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

に蛇の補題（定理 4.14）を用いることで完全列

$$0 \to \mathsf{Ker}\, d_n^X \xrightarrow{f_n'} \mathsf{Ker}\, d_n^Y \xrightarrow{g_n'} \mathsf{Ker}\, d_n^Z \to X_{n-1}/\, \mathsf{Im}\, d_n^X \xrightarrow{\overline{f_{n-1}}} Y_{n-1}/\, \mathsf{Im}\, d_n^Y \xrightarrow{\overline{g_{n-1}}} Z_{n-1}/\, \mathsf{Im}\, d_n^Z \to 0$$

を得る（f_n' の単射性は f_n が単射であることから，$\overline{g_{n-1}}$ の全射性は g_{n-1} が全射であることから従う）．

$n \in \mathbb{Z}$ に対して可換図式

$$\begin{tikzcd}
& X_n/\, \mathsf{Im}\, d_{n+1}^X \arrow[r, "\overline{f_n}"] \arrow[d, "\overline{d_n^X}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y_n/\, \mathsf{Im}\, d_{n+1}^Y \arrow[r, "\overline{g_n}"] \arrow[d, "\overline{d_n^Y}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_n/\, \mathsf{Im}\, d_{n+1}^Z \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d_n^Z}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathsf{Ker}\, d_{n-1}^X \arrow[r, "f_{n-1}'"'] & \mathsf{Ker}\, d_{n-1}^Y \arrow[r, "g_{n-1}'"'] & \mathsf{Ker}\, d_{n-1}^Z &
\end{tikzcd}$$

の上下の行は完全列なので蛇の補題（定理 4.14）を用いることで完全列

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Ker}\, \overline{d_n^X} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathsf{Ker}\, \overline{d_n^Y} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathsf{Ker}\, \overline{d_n^Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathsf{Coker}\, \overline{d_n^X} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathsf{Coker}\, \overline{d_n^Y} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathsf{Coker}\, \overline{d_n^Z} \arrow[d, equal] \\
\mathsf{H}_n(X_\bullet) \arrow[r, "\mathsf{H}_n(f_\bullet)"'] & \mathsf{H}_n(Y_\bullet) \arrow[r, "\mathsf{H}_n(g_\bullet)"'] & \mathsf{H}_n(Z_\bullet) \arrow[r, "\delta_n"'] & \mathsf{H}_{n-1}(X_\bullet) \arrow[r, "\mathsf{H}_{n-1}(f_\bullet)"'] & \mathsf{H}_{n-1}(Y_\bullet) \arrow[r, "\mathsf{H}_{n-1}(g_\bullet)"'] & \mathsf{H}_{n-1}(Z_\bullet)
\end{tikzcd}$$

を得る． ■

最後に，Hom 加群，テンソル積と完全列の関係について述べる．

命題 4.16. $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ を R 加群の完全列とする．

(1) 任意の R 加群 X に対して

$$0 \to \mathsf{Hom}_R(X, L) \xrightarrow{f_*} \mathsf{Hom}_R(X, M) \xrightarrow{g_*} \mathsf{Hom}_R(X, N)$$

は完全列．

(2) 任意の R 加群 X に対して

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(N,X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M,X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(L,X)$$

は完全列.

証明. (1) f_* の単射性は補題 4.4(1) から分かる．また，$g \circ f = 0$ なので $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = 0$ となる（命題 3.7 より）.

最後に $\mathrm{Ker}\, g_* \subseteq \mathrm{Im}\, f_*$ を示す． $\varphi \in \mathrm{Ker}\, g_*$ とする．このとき，$g \circ \varphi = 0$ である．ここで，与えられた列の完全性から $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f$ かつ $u : \mathrm{Im}\, f \xrightarrow{\cong} L$ が存在して $f \circ u = i_g : \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f \to M$ となる．また，補題 4.5(1) より，ある $\overline{\varphi} : X \to \mathrm{Ker}\, g$ が存在して $i_g \circ \overline{\varphi} = \varphi$ となる．このとき，$u \circ \overline{\varphi} : X \to L$ は $f_*(u \circ \overline{\varphi}) = f \circ u \circ \overline{\varphi} = i_g \circ \overline{\varphi} = \varphi$ を満たす．従って，$\mathrm{Ker}\, g_* = \mathrm{Im}\, f_*$ が示された.

(2) も同様の議論で示される（補題 4.4(1), 補題 4.5(1) の代わりに補題 4.4(2), 補題 4.5(2) を用いる). ■

系 4.17. $f : M \to N$ を R 準同型写像，X を R 加群とする．このとき，以下の R 同型が存在する：

(1) $\mathrm{Ker}(f_* : \mathrm{Hom}_R(X,M) \to \mathrm{Hom}_R(X,N)) \cong \mathrm{Hom}_R(X, \mathrm{Ker}\, f)$
(2) $\mathrm{Ker}(f^* : \mathrm{Hom}_R(N,X) \to \mathrm{Hom}_R(M,X)) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Coker}\, f, X)$

証明. (1) 完全列 $0 \to \mathrm{Ker}\, f \xrightarrow{i_f} M \xrightarrow{f'} \mathrm{Im}\, f \to 0$ を考える．ただし，$f' : M \to \mathrm{Im}\, f$ は $f'(m) = f(m)$ なる写像．ここで，$i : \mathrm{Im}\, f \to N$ を包含写像とすると $i \circ f' = f$ が成り立つ．命題 4.16 より完全列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(X, \mathrm{Ker}\, f) \to \mathrm{Hom}_R(X,M) \xrightarrow{f'_*} \mathrm{Hom}_R(X, \mathrm{Im}\, f)$$

が存在するので，命題 4.11(1) より $\mathrm{Hom}_R(X, \mathrm{Ker}\, f) \cong \mathrm{Ker}(f'_*)$ となる．今，i は単射なので $i_* : \mathrm{Hom}_R(X, \mathrm{Im}\, f) \to \mathrm{Hom}_R(X,N)$ も単射であり，

$$\mathrm{Ker}\, f_* = \mathrm{Ker}(i_* \circ f'_*) \cong \mathrm{Ker}(f'_*) \cong \mathrm{Hom}_R(X, \mathrm{Ker}\, f)$$

が示された.

(2) も同様の議論で示される. ■

命題 4.18. $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ を R 加群の完全列とする.

(1) 任意の R 加群 X に対して

$$L \otimes_R X \xrightarrow{f \otimes_R \mathrm{id}_X} M \otimes_R X \xrightarrow{g \otimes_R \mathrm{id}_X} N \otimes_R X \to 0$$

は完全列.

(2) 任意の R 加群 X に対して

$$L \otimes_R X \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes f} M \otimes_R X \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes g} N \otimes_R X \to 0$$

は完全列.

証明. $N \otimes_R X$ の元は $\xi = \sum_{i=1}^t n_i \otimes x_i$ の形をしている．g が全射なので $n_i = f(m_i)$ $(m_i \in M)$ と表せる．このとき，$(g \otimes \mathrm{id}_X)(\sum_{i=1}^t m_i \otimes x_i) = \sum_{i=1}^t g(m_i) \otimes x_i = \sum_{i=1}^t n_i \otimes x_i = \xi$ となるので，$g \otimes X$ は全射．また，$g \circ f = 0$ なので $(g \otimes \mathrm{id}_X) \circ (f \otimes \mathrm{id}_X) = (g \circ f) \otimes \mathrm{id}_X = 0$.

最後に，$\mathrm{Ker}(g \otimes \mathrm{id}_X) \subseteq \mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X)$ を示す．$\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X) \subseteq \mathrm{Ker}(g \otimes \mathrm{id}_X)$ なので，定理 2.12(1) より well-defined な R 準同型写像

$$\Phi : (M \otimes_R N)/\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X) \to N \otimes_R X,\ \sum_{i=1}^t m_i \otimes x_i + \mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X) \mapsto \sum_{i=1}^t g(m_i) \otimes x_i$$

が定まる．この核は $\mathrm{Ker}(g \otimes \mathrm{id}_X)/\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X)$ なので，Φ が単射（Φ は全射なので同型射）であることを示せば良い．そのために Φ の逆写像を構成する．写像

$$\psi : N \times X \to M \otimes_R N/\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X)$$

を $f(n,x) = m \otimes x + \mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X)$（ただし $g(m) = n$）で定める．f が well-defined であることを示すために $g(m) = g(m') = n$ なる $m, m' \in M$ をとる．このとき $m - m' \in \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f$ より，$m - m' = f(l)$ $(l \in L)$ と表せる．従って $m \otimes x - m' \otimes x = (m - m') \otimes x = f(l) \otimes x = (f \otimes \mathrm{id}_X)(l \otimes x) \in \mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X)$ となり，ψ が well-defined であることが分かる．構成から ψ は R 双線型写像である．従って，定理 3.11 より R 準同型写像

$$\Psi : N \otimes_R X \to (M \otimes_R X)/\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X),\ \sum_{i=1}^t n_i \otimes x_i \mapsto \sum_{i=1}^t m_i \otimes x_i$$

が定まる．ただし，$m_i \in M$ は $g(m_i) = n_i$ を満たす元．定義から，$\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{(M \otimes_R N)/\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X)}$ を満たすことが容易に分かる．このことから Φ が単射となることが分かる．

(2) 命題 3.15(3) と (1) より従う． ■

系 4.19. $f : M \to N$ を R 準同型写像，X を R 加群とする．このとき，以下の R 同型が存在する：

(1) $\mathrm{Coker}(f \otimes \mathrm{id}_X) \cong \mathrm{Coker}\, f \otimes_R X$

(2) $\mathrm{Coker}(\mathrm{id}_X \otimes f) \cong X \otimes_R \mathrm{Coker}\, f$

証明. 完全列 $0 \to \mathrm{Im}\, f \xrightarrow{i} N \xrightarrow{\pi_f} \mathrm{Coker}\, f \to 0$ を考える．ただし，i は包含写像．ここで，$f' : M \to \mathrm{Im}\, f$ を $f'(m) = f(m)$ なる写像とすると，$i \circ f' = f$ が成り立つ．命題 4.18 より完全列

$$(\mathrm{Im}\, f) \otimes_R X \xrightarrow{i \otimes \mathrm{id}_X} N \otimes_R X \xrightarrow{\pi_f \otimes \mathrm{id}_X} (\mathrm{Coker}\, f) \otimes_R X \to 0$$

が存在するので，命題 4.11(2) より $(\mathrm{Coker}\, f) \otimes_R X \cong \mathrm{Coker}(i \otimes \mathrm{id}_X)$ となる．ここで，再び命題 4.18 より全射 $f' : M \to \mathrm{Im}\, f$ から全射 $f' \otimes \mathrm{id}_X : M \otimes_R X \to (\mathrm{Im}\, f) \otimes_R X$ を得るので $\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X) = \mathrm{Im}((i \circ f') \otimes \mathrm{id}_X) = \mathrm{Im}((i \otimes \mathrm{id}_X) \circ (f' \otimes \mathrm{id}_X)) = \mathrm{Im}(i \otimes \mathrm{id}_X)$ となる．以上の議論から

$$\mathrm{Coker}(f \otimes \mathrm{id}_X) = (N \otimes_R X)/\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_X) = (N \otimes_R X)/\mathrm{Im}(i \otimes \mathrm{id}_X) = \mathrm{Coker}(i \otimes \mathrm{id}_X) \cong (\mathrm{Coker}\, f) \otimes_R X$$

が示される． ■

系 4.20. M を R 加群，I を R のイデアルとする．このとき，R 同型

$$M \otimes_R (R/I) \cong M/IM$$

が存在する．特に，R のイデアル I, J に対して

$$(R/I) \otimes_R (R/J) \cong R/(I+J)$$

が存在する．

証明. $i : I \to R$ を包含写像とすると，$\mathsf{Coker}\, i = R/I$．従って，系 4.19 より

$$M \otimes_R R/I \cong \mathsf{Coker}(\mathsf{id}_M \otimes i) = (M \otimes R)/(\mathsf{Im}(\mathsf{id}_M \otimes i)) \cong M/IM$$

が成り立つ．最後の同型は命題 3.15(1) より従う． ■

注意． 命題 4.16, 命題 4.18 の性質をそれぞれ「Hom 関手の左完全性」,「テンソル関手の右完全性」と呼ぶ．また，以下の例が示すように命題 4.16 の右の写像の全射性, 命題 4.18 の左の写像の単射性は一般に言えない．

例 4.21. (1) $\mathbb{Z}$ 加群の完全列 $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ を考える．ただし，i は包含写像，π は自然な全射．このとき

$$0 \to \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$$

は命題 4.16 より完全列．例 3.5(1)(3) より $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$ なので i^* は全射ではない（全射ならば $\mathbb{Z} = 0$ となってしまう)．

(2) $\mathbb{Z}$ 加群の完全列 $0 \to 2\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ を考える．ただし，i は包含写像，π は自然な全射．このとき

$$0 \to \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

は命題 4.16 より完全列となる．命題 3.3 より $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$, $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ なので i^* は全射ではない（全射ならば $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 0$ となってしまう)．

(3) $\mathbb{Z}$ 加群の完全列 $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ を考える．$\times 2$ は 2 倍する写像，π は自然な全射．このとき

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi \otimes \mathsf{id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to 0$$

は命題 4.18 より完全列となる．ここで，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 上の 2 倍写像は単射でない．

完全列 $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ と R 準同型写像 X に対して $g_* : \mathsf{Hom}_R(X, M) \to \mathsf{Hom}_R(X, N)$, $f^* : \mathsf{Hom}_R(M, X) \to \mathsf{Hom}_R(L, X)$ が全射からどれぐらい遠いか，$f \otimes \mathsf{id}_X : L \otimes_R X \to M \otimes_R X$ がどれぐらい単射から遠いかは Ext 加群，Tor 加群と呼ばれる加群を用いて制御される．これらの加群はホモロジー代数学で重要な役割を果たす．この内容は後章で扱う予定である．

4.6 鎖複体のホモトピー

例 4.8 で述べたように，鎖複体においてはホモロジー加群が重要な情報を持っていると考えることができる．もちろん同型な複体は同型なホモロジー加群を持つので，そのような重要な情報が保たれる．この節では後のために，同型よりも弱いがホモロジー加群を保つホモトピー同値の概念を導入する．

定義 4.22. $f_\bullet, g_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ を R 加群の鎖写像とする．
R 準同型写像 $s_n : X_n \to Y_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z})$ の列 $s = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ が

$$f_n - g_n = s_{n-1} \circ d_n^X + d_{n+1}^Y \circ s_n \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$$

を満たすとき，s を $f_\bullet$ と $g_\bullet$ の間の**ホモトピー（homotopy）**と呼ぶ．
$f_\bullet$ と $g_\bullet$ の間のホモトピーが存在するとき，$f_\bullet$ と $g_\bullet$ は**ホモトピック（homotopic）**であるといい，$f_\bullet \sim g_\bullet$ と表す．

定義 4.23. $f_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ を R 加群の鎖写像とする．
$f_\bullet$ が**ホモトピー同値**であるとは，「ある鎖写像 $g_\bullet : Y_\bullet \to X_\bullet$ が存在して，$g_\bullet \circ f_\bullet \sim \mathrm{id}_{X_\bullet}$ かつ $f_\bullet \circ g_\bullet \sim \mathrm{id}_{Y_\bullet}$」が成り立つときに言う．
ホモトピー同値な鎖写像 $f_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ が存在するとき，$X_\bullet$ と $Y_\bullet$ は**ホモトピー同値**であるといい，$X_\bullet \sim Y_\bullet$ と表す．

以下の二つの事実が示すように，ホモトピーの概念はホモロジーと非常に相性が良い：

命題 4.24. $f_\bullet, g_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ がホモトピックならば，任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{H}_n(f_\bullet) = \mathrm{H}_n(g_\bullet)$ が成り立つ．

証明. $\mathrm{H}_n(X_\bullet)$ の任意の元 $x + \operatorname{Im} d_{n+1}^X$ $(x \in \operatorname{Ker} d_n^X)$ に対して

$$\mathrm{H}_n(f_\bullet)(x + \operatorname{Im} d_{n+1}^X) = \mathrm{H}_n(g_\bullet)(x + \operatorname{Im} d_{n+1}^X)$$

ここで, $\mathrm{H}_n(f_\bullet)$, $\mathrm{H}_n(g_\bullet)$ の定義を思い出すと $\mathrm{H}_n(f_\bullet)(x+\operatorname{Im} d_{n+1}^X) = f_n(x)+\operatorname{Im} d_{n+1}^Y$, $\mathrm{H}_n(g_\bullet)(x+\operatorname{Im} d_{n+1}^X) = g_n(x) + \operatorname{Im} d_{n+1}^Y$ である．従って，

$$f_n(x) + \operatorname{Im} d_{n+1}^Y = g_n(x) + \operatorname{Im} d_{n+1}^Y \quad (\iff f_n(x) - g_n(x) \in \operatorname{Im} d_{n+1}^Y)$$

を示せば良い．
$s = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ を $f_\bullet$ と $g_\bullet$ の間のホモトピーとすると，$f_n - g_n = s_{n-1} \circ d_n^X + d_{n+1}^Y \circ s_n$ なので

$$f_n(x) - g_n(x) = s_{n-1}(d_n^X(x)) + d_{n+1}^Y(s_n(x)) = d_{n+1}^Y(s_n(x)) \in \operatorname{Im} d_{n+1}^Y$$

となる（二つ目の等式は $x \in \operatorname{Ker} d_n^X$ より $d_n^X(x) = 0$ となることから分かる）．よって，任意の $x + \operatorname{Im} d_{n+1}^X \in \mathrm{H}_n(X_\bullet)$ に対して

$$\mathrm{H}_n(f_\bullet)(x + \operatorname{Im} d_{n+1}^X) = f_n(x) + \operatorname{Im} d_{n+1}^Y = g_n(x) + \operatorname{Im} d_{n+1}^Y = \mathrm{H}_n(g_\bullet)(x + \operatorname{Im} d_{n+1}^X)$$

が示されたので，$\mathsf{H}_n(f_\bullet) = \mathsf{H}_n(g_\bullet)$. ■

系 4.25. $X_\bullet$ と $Y_\bullet$ がホモトピー同値ならば，任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathsf{H}_n(X_\bullet) \cong \mathsf{H}_n(Y_\bullet)$ が成り立つ.

証明. $X_\bullet$ と $Y_\bullet$ がホモトピー同値なので，鎖写像 $f_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ と $g_\bullet : Y_\bullet \to X_\bullet$ が存在して，$g_\bullet \circ f_\bullet \sim \mathrm{id}_{X_\bullet}$, $f_\bullet \circ g_\bullet \sim \mathrm{id}_{Y_\bullet}$. 系 4.25 より

$$\begin{aligned} \mathsf{H}_n(g_\bullet) \circ \mathsf{H}_n(f_\bullet) &= \mathsf{H}_n(g_\bullet \circ f_\bullet) = \mathsf{H}_n(\mathrm{id}_{X_\bullet}) = \mathrm{id}_{\mathsf{H}_n(X_\bullet)} \\ \mathsf{H}_n(f_\bullet) \circ \mathsf{H}_n(g_\bullet) &= \mathsf{H}_n(f_\bullet \circ g_\bullet) = \mathsf{H}_n(\mathrm{id}_{Y_\bullet}) = \mathrm{id}_{\mathsf{H}_n(Y_\bullet)} \end{aligned}$$

が成り立つ．従って，$\mathsf{H}_n(f_\bullet) : \mathsf{H}_n(X_\bullet) \xrightarrow{\cong} \mathsf{H}_n(Y_\bullet)$ は R 同型. ■

演習問題

問題 4.1. 定理 4.14 において，

(1) $\mathrm{Ker}\, f_1' \cong \mathrm{Ker}\, f_1$

(2) $\mathrm{Coker}\, \overline{g_2} \cong \mathrm{Coker}\, g_2$

を示せ．従って，完全列

$$\mathrm{Ker}\, f_1 \xrightarrow{i} \mathrm{Ker}\, u \xrightarrow{f_1'} \mathrm{Ker}\, v \xrightarrow{g_1'} \mathrm{Ker}\, w \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\, u \xrightarrow{\overline{f_2}} \mathrm{Coker}\, v \xrightarrow{\overline{g_2}} \mathrm{Coker}\, w \xrightarrow{\pi} \mathrm{Coker}\, g_2$$

が存在する.

問題 4.2. 命題 4.18 の証明中の ψ が R 双線型写像となることを示せ.

問題 4.3. $f : L \to M, g : M \to N$ を R 準同型写像とする．このとき，完全列

$$0 \to \mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Ker}(g \circ f) \to \mathrm{Ker}\, g \to \mathrm{Coker}\, f \to \mathrm{Coker}(g \circ f) \to \mathrm{Coker}\, g \to 0$$

が存在することを示せ.
ヒント：適当な可換図式に蛇の補題を用いる.

問題 4.4. 0 でないアーベル群 M に対して

- M が**ねじれ無し**（***torsion-free***）
  :$\Longleftrightarrow$ 任意の $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ と $x \in M$ に対して「$nx = 0$ ならば $x = 0$」が成り立つ
- M が**可除群**（***divisible group***）
  :$\Longleftrightarrow$ 任意の $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ と $x \in M$ に対して $x = ny$ となる $y \in M$ が存在する

と定義する.
　このとき，以下の問に答えよ：

(1) 0 でない整数 n に対して，$n\mathbb{Z}$ がねじれ無しであることを示せ．また，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ がねじれ無しでないことを示せ.

(2) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ が可除群であることを示せ．また，$\mathbb{Z}$ が可除群でないことを示せ.

(3) アーベル群の完全列

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

において，

(i) L と N がねじれ無しならば M もねじれ無しである.

(ii) L と N が可除群ならば M も可除群である.

を示せ.

5 射影加群

環論やその他周辺分野においては，環上の加群のテンソル積や Hom 加群が重要な役割を果たす．しかし，例 4.21 で見たようにテンソル積や Hom 加群は単完全列を保たないので，ホモロジー代数のテクニックをそのままテンソル積や Hom 加群に適用するには困難が伴う．そこで，テンソル積が Hom 加群を取った時にテンソル席が保たれるような加群である平坦加群，射影加群，入射加群を考え，これらを用いて加群を近似するという手法が考えられる．この方法でテンソル積や Hom 加群を一般化する Tor 加群や Ext 加群の概念が定義される．この章では射影加群と Tor 加群に絞って解説する．

以下，R を環とする．

5.1 射影加群

定義 5.1. R 加群 P が**射影加群（projective module）**であるとは，以下の同値な条件のいずれか（従って両方）を満たすときに言う：

(i) 任意の全射 R 準同型写像 $p: M \to N$ と任意の R 準同型写像 $f: P \to N$ に対して，$p \circ g = f$ となる R 準同型写像 $g: P \to M$ が存在する．

(ii) 任意の全射 R 準同型写像 $p: M \to N$ に対して，

$$p_*: \mathrm{Hom}_R(P, M) \to \mathrm{Hom}_R(P, N),\ g \mapsto p \circ g$$

が全射．

命題 5.2. 自由加群は射影加群である．

証明. 自由加群 $P \cong R^{(\Lambda)}$ を考える．全射 R 準同型写像 $p: M \to N$ と R 準同型写像 $f: P \to N$ に対して可換図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_R(P, M) & \xrightarrow{p_*} & \mathrm{Hom}_R(P, N) \\
\wr\| & & \wr\| \\
\mathrm{Hom}_R(R^{(\Lambda)}, M) & \xrightarrow{p_*} & \mathrm{Hom}_R(R^{(\Lambda)}, N) \\
\wr\| & & \wr\| \\
M^\Lambda & \xrightarrow[p^\Lambda]{} & N^\Lambda
\end{array}$$

を得る．ここで，下の縦の同型は命題 3.4(3) の同型であり，$p^\Lambda: M^\Lambda \to N^\Lambda$ は $p^\Lambda((m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = (p(m_\Lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ なる写像である．p が全射なので，p^Λ が全射になることは容易に分かる．従って，図式の可換性より 1 行目の p_* も全射となる． ■

系 5.3. 任意の R 加群 P に対して，ある射影加群 P と全射 R 準同型写像 $p: P \to M$ が存在する．

証明. 補題 2.19 により，自由加群 P と全射 $p: P \to M$ が存在する．命題 5.2 により自由加群 P は射影加群なので主張が示された． ■

次に，命題 5.2 の "ほぼ"逆も成り立つことを見る．そのために以下の補題が必要になる：

補題 5.4. $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ を R 加群の完全列とする．このとき，次の条件は同値である：

(1) ある R 準同型写像 $s : N \to M$ が存在して $g \circ s = \mathrm{id}_N$ となる．
(2) ある R 準同型写像 $r : M \to L$ が存在して $r \circ f = \mathrm{id}_L$ となる．

さらに，この条件のどちらか一方（従って両方）が成り立つとき，R 同型 $M \cong L \oplus N$ が存在する．

証明. (1) $\Longrightarrow$ (2) を示す（(2) $\Longrightarrow$ (1) も同様）．

$m \in M$ に対して，$g(m - s(g(m))) = g(m) - g(s(g(m))) = g(m) - g(m)$ より $m - s(g(m)) \in \mathrm{Im}\, f$ となる． 従って，$m - s(g(m)) = f(l)$ なる $l \in L$ がただ一つ存在する．この l を $r(m) := l$ と書くことにすると，写像 $r : M \to L$ が定まる．定義より，任意の $m \in M$ に対して $f(r(m)) = m - s(g(m))$ が成り立つ．

<u>r は R 準同型</u>：

$a \in R$, $m, m' \in M$ を考える．

- $f(r(m+m')) = (m+m') - s(g(m+m')) = (m - s(g(m))) + (m' - s(g(m'))) = f(r(m)) + f(r(m')) = f(r(m) + r(m'))$ と f の単射性より $r(m+m') = r(m) + r(m')$ が成り立つ．
- $f(r(am)) = (am) - s(g(am)) = a(m - s(g(m))) = af(r(m)) = f(ar(m))$ と f の単射性より，$r(am) = ar(m)$ が成り立つ．

以上より，r は R 準同型となる．

<u>$r \circ f = \mathrm{id}_L$</u>：

$l \in L$ に対して，$f(l) - s(g(f(l))) = f(l)$ となるので r の定義より $r(f(l)) = l$．従って，$r \circ f = \mathrm{id}_L$．

条件 (1) が満たされているとする．上の証明より R 準同型 $r : M \to L$ が存在して，$r \circ s = 0$, $r \circ f = \mathrm{id}_L$, $s \circ g + f \circ r = \mathrm{id}_M$ が成り立つ．このとき，準同型写像

$$\begin{array}{ccc} M & \cong & L \oplus N \\ \cup\!\!\!\!\!\!\;\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\!\;\shortmid \\ m & \longmapsto & (r(m), g(m)) \\ f(l) + s(n) & \longleftarrow & (l, n) \end{array}$$

が同型を与える． ■

以下の命題により，"ほぼ"「射影加群=自由加群」であることが分かる（R がただ一つの極大イデアルを持つ環または PID のとき，射影加群と自由加群は本当に等しくなる）[*1]．

命題 5.5. R 加群 P に対して，

$$P \text{ が射影加群} \iff \text{ある } R \text{ 加群 } P' \text{ が存在して } P \oplus P' \text{ は自由加群と同型となる}$$

[*1] しかし，「自由加群でない射影加群がどれぐらいあるか」という問題も非常に重要な問題である（cf. 代数的 K 理論）．そのような加群の一つの例は問題 5.3 で与えられる．

証明. $(\Longrightarrow)$：補題 2.19 より，自由加群 F と全射 R 準同型 $p : F \to P$ が存在する．ここで，短完全列 $0 \to \mathrm{Ker}\, p \to F \xrightarrow{p} P \to 0$ を考える．P が射影加群で p が全射なので，ある R 準同型 $r : P \to F$ が存在して $p \circ r = \mathrm{id}_P$ が成り立つ．従って，補題 5.4 より R 同型 $F \cong P \oplus \mathrm{Ker}\, p$ が存在する．

$(\Longleftarrow)$：$P \oplus P'$ が自由加群 F と同型であるとする．全射 R 準同型 $f : X \to Y$ に対して可換図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_R(F, X) & \xrightarrow{\quad f_* \quad} & \mathrm{Hom}_R(F, Y) \\
\wr\| & & \wr\| \\
\mathrm{Hom}_R(P \oplus P', X) & \xrightarrow{\quad f_* \quad} & \mathrm{Hom}_R(P \oplus P', Y) \\
\wr\| & & \wr\| \\
\mathrm{Hom}_R(P, X) \oplus \mathrm{Hom}_R(P', X) & \xrightarrow{f_*} & \mathrm{Hom}_R(P, Y) \oplus \mathrm{Hom}_R(P', Y) \\
{\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\
\mathrm{Hom}_R(P, X) & \xrightarrow{\quad f_* \quad} & \mathrm{Hom}_R(P, Y)
\end{array}$$

を考える．ただし，π は第 1 成分を対応させる全射．自由加群 F は射影加群なので $f_* : \mathrm{Hom}_R(F, X) \to \mathrm{Hom}_R(F, Y)$ が全射となり，この可換図式より $f_* : \mathrm{Hom}_R(P, X) \to \mathrm{Hom}_R(P, Y)$ も全射であることが分かる．従って，P は射影加群. ■

射影加群は "ほぼ" 自由加群なので以下の事実も同様に示される：

命題 5.6. $f : M \to N$ を単射 R 準同型写像，P を射影加群とする．このとき，$f \otimes_R \mathrm{id}_P : M \otimes_R P \to N \otimes_R P$ は単射である．

証明. P が自由加群（$P \cong R^{(\Lambda)}$）のとき：

このとき，可換図式

$$\begin{array}{ccc}
M \otimes_R P & \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_P} & N \otimes_R P \\
\wr\| & & \wr\| \\
M \otimes_R R^{(\Lambda)} & \xrightarrow{f \otimes_R \mathrm{id}_{R^{(\Lambda)}}} & N \otimes_R R^{(\Lambda)} \\
\wr\| & & \wr\| \\
M^{(\Lambda)} & \xrightarrow[f^{(\Lambda)}]{} & N^{(\Lambda)}
\end{array}$$

が存在する．ここで，下の縦の同型は命題 3.15(4) のものである．また，$f^{(\Lambda)}((m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = (f(m_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ である．すると，f が単射であることから $f^{(\Lambda)}$ も単射になることが分かる．従って，この可換図式から $f \otimes_R \mathrm{id}_P$ は単射になる．

P が一般の射影加群のとき：

命題 5.6 より，ある R 加群 P'，自由加群 F，R 同型 $P \oplus P' \cong F$ が存在する．このとき，可換図式

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R F \arrow[r, "f\otimes \mathrm{id}_F"] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & N \otimes_R F \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \\
M \otimes_R (P \oplus P') \arrow[r, "f\otimes \mathrm{id}_{P\oplus P'}"] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & N \otimes_R (P \oplus P') \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \\
(M \otimes_R P) \oplus (M \otimes_R P') \arrow[r, "(f\otimes \mathrm{id}_P)\oplus(f\otimes \mathrm{id}_{P'})"] \arrow[d] & (N \otimes_R P) \oplus (N \otimes_R P') \arrow[d] \\
M \otimes_R P \arrow[r, "f\otimes \mathrm{id}_P"'] & N \otimes_R P
\end{tikzcd}$$

が存在する．ここで，最も下の縦の写像は第一成分を対応させる写像である．上で示したことから $f \otimes \mathrm{id}_F$ が単射となるので，図式の可換性から $f \otimes \mathrm{id}_P$ も単射であることが分かる． ■

5.2 射影分解

次に，一般の加群を射影加群という良い加群を用いて近似する射影分解を導入する．

定義 5.7. M を R 加群とする．
鎖複体 $P_\bullet = (\cdots \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to 0)$ が以下の条件を満たすとき，**$P_\bullet$ を M の射影分解**と呼ぶ：

(i) 任意の n に対して P_n は射影加群
(ii) 任意の $n > 0$ に対して $P_\bullet$ は P_n で完全
(iii) $\mathrm{H}_0(P_\bullet) \cong M$（つまり，$\mathrm{Coker}(d_1) \cong M$）

補題 5.8. M を R 加群とする．鎖複体 $P_\bullet = (\cdots \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to 0)$ に対して以下の条件は同値：

(1) $P_\bullet$ が M の射影分解
(2) ある R 準同型写像 $p : P_0 \to M$ が存在して，

$$\cdots \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{p} M \to 0$$

が完全列になる．

証明. 定義から容易に分かる（射影分解 $P_\bullet$ に対して $p : P_0 \to M$ を自然な全射とする）． ■

コメント. M を射影分解は以下のようにして構成することができる：

- M を生成する元の族 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_0}$ を取ると，全射

$$p : P_0 := R^{(\Lambda)} \to M,\ (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_0} \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda_0} a_\lambda x_\lambda$$

を得る．

- $\mathrm{Ker}\,p$ を生成する元の族 $\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1}$ を取ると，全射

$$P_1 := R^{(\Lambda_1)} \to \mathrm{Ker}\,p,\ (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_1} \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda_1} a_\lambda y_\lambda$$

  を得る．この全射と包含写像 $\mathrm{Ker}\,p \hookrightarrow P_0$ の合成を $d_1 : P_1 \to P_0$ とすると，

$$P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{p} M \to 0$$

  は完全列.
- $\mathrm{Ker}\,d_1$ を生成する元の族 $\{z_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2}$ を取ると，全射

$$P_2 := R^{(\Lambda_2)} \to \mathrm{Ker}\,d_1,\ (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_2} \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda_2} a_\lambda z_\lambda$$

  を得る．この全射と包含写像 $\mathrm{Ker}\,d_1 \hookrightarrow P_1$ の合成を $d_2 : P_2 \to P_1$ とすると，

$$P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{p} M \to 0$$

  は完全列.
- 以下同様の操作を繰り返す.

この方法で，PID 上の加群の射影分解について以下のことが分かる：

命題 5.9. R を PID とする．このとき，任意の R 加群 M は長さが 1 の射影分解 $P_\bullet = (0 \to P_1 \to P_0 \to 0)$ を持つ.

証明. 以下の事実を認める：「R が PID のとき，自由加群の部分加群も自由加群である」[*2]

自由加群 P_0 からの全射 $p : P_0 \to M$ を考えると，上の事実より $P_1 := \mathrm{Ker}\,p$ は自由加群となる．従って，完全列 $0 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ を得るので，$P_\bullet = (0 \to P_1 \to P_0 \to 0)$ は M の射影分解となる. ■

例 5.10. (1) $\mathbb{Z}$ 加群

$$M = \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/a_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/a_t\mathbb{Z} \quad (a_1, a_2, \ldots, a_t \in \mathbb{Z})$$

を考える（定理 2.28 より，全ての有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群はこの形の加群と同型）.

- M は $\boldsymbol{e}_i := (a_1\mathbb{Z}, \ldots, 1 + a_i\mathbb{Z}, \ldots, a_t\mathbb{Z})$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$ で生成される．従って，全射

$$p : P_0 := \mathbb{Z}^n \to M,\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i = (x_1 + a_1\mathbb{Z}, x_2 + a_2\mathbb{Z}, \ldots, x_t + a_t\mathbb{Z})$$

---

*2 自由加群 F が有限生成のとき，F の部分加群 M も有限生成となるので，定理 2.27 より

$$M \cong R^k \oplus R/a_1R \oplus \cdots \oplus R/a_rR \quad (0 \neq a_i \in R)$$

と表せる．R/a_iR の元は a_i 倍すると 0 になる．しかし，F にはそのような元が存在しないので $M \cong R^k$ となり，自由加群 F の部分加群 M も自由加群.

F が有限生成ではないとき，この主張の証明はもっと難しい（Zorn の補題を使う）.

を得る．

- $\mathrm{Ker}\, p = a_1\mathbb{Z} \oplus a_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus a_t\mathbb{Z}$ となり，これは $\boldsymbol{f}_i := (0, \ldots, a_t, \ldots, 0)$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$ で生成される．従って，全射

$$P_1 := \mathbb{Z}^n \to \mathrm{Ker}\, p,\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{f}_i = (x_1a_1, x_2a_2, \ldots, x_ta_t)$$

を得る．この全射と包含写像 $\mathrm{Ker}\, p \hookrightarrow P_0$ の合成

$$d_1 : P_1 \to P_0,\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1a_1, x_2a_2, \ldots, x_ta_t)$$

を考えると，

$$P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{p} M \to 0$$

は完全列．

- $\mathrm{Ker}(d_1) = 0$ なので，完全列

$$0 \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{p} M \to 0$$

を得る．

従って，M は射影分解 $P_\bullet := (0 \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to 0)$ を持つ．

(2) $\mathbb{F}$ を体とする．自然数 $n \geq 1$ に対して環 $R = \mathbb{F}[x]/(x^n)$ を考える．$a \in R$ に対して

$$a\overline{x}^i = 0 \Longleftrightarrow a \in \overline{x}^{n-i}R$$

が成り立つことに注意しておく（各自チェックせよ）．

R 加群 $M = R/\overline{x}^iR$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を考える．

- M は $1 + \overline{x}^iR$ で生成されるので，全射

$$p : P_0 := R \to M,\ a \mapsto a + \overline{x}^iR$$

を得る（これは自然な全射である）．

- $\mathrm{Ker}\, p = \overline{x}^iR$ は $\overline{x}^i$ で生成されるので，全射

$$P_1 := R \to \mathrm{Ker}\, p,\ a \mapsto a\overline{x}^i$$

を得る．この全射と包含写像 $\mathrm{Ker}\, p \hookrightarrow P_0$ の合成

$$d_1 : P_1 \to P_0,\ a \mapsto a\overline{x}^i$$

を考えると，

$$P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{p} M \to 0$$

は完全列．

- $\mathrm{Ker}\, d_1 = \{a \in R \mid a\overline{x}^i = 0\} = \overline{x}^{n-i}R$ は $\overline{x}^{n-i}$ で生成されるので，全射

$$P_2 := R \to \mathrm{Ker}\, d_1,\ a \mapsto a\overline{x}^{n-i}$$

を得る．この全射と包含写像 $\operatorname{Ker} d_1 \hookrightarrow P_1$ の合成

$$d_2 : P_2 \to P_1,\ a \mapsto a\overline{x}^{n-i}$$

を考えると，

$$P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{p} M \to 0$$

は完全列．

- 以後同様のことを繰り返すと，M の射影分解

$$P_\bullet := (\cdots \xrightarrow{\overline{x}^{n-i}} R \xrightarrow{\overline{x}^{i}} R \xrightarrow{\overline{x}^{n-i}} R \xrightarrow{\overline{x}^{i}} R \to 0)$$

を得る．

実は補題 2.19 により $R = \mathbb{F}[x]/(x^n)$ の有限生成加群は全て

$$(R/(\overline{x}))^{m_1} \oplus (R/(\overline{x}^2))^{m_2} \oplus \cdots \oplus (R/(\overline{x}^n))^{m_n} \quad (m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{N})$$

の形をしていることが分かるので，この計算により全ての有限生成 R 加群の射影分解を計算することができる．

与えられた加群の射影分解は一通りには決まらない．例えば，

$$(0 \to \overset{1}{R} \xrightarrow{\binom{0}{1}} \overset{0}{R^2} \to 0), \quad (0 \to \overset{0}{R} \to 0)$$

はどちらも R の射影分解である．しかし，ホモトピー同値の意味では一通りに決まる：

命題 5.11. M を R 加群，$P_\bullet, Q_\bullet$ を M の射影分解とする．

(1) ある鎖写像 $f_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet$ が存在して，$q \circ f_0 = p$ が成り立つ．ただし，$p : P_0 \to M$, $q : Q_0 \to M$ は自然な全射．

(2) $P_\bullet$ と $Q_\bullet$ はホモトピー同値である．

証明. (1) f_n を順に構成していく．

- $n < 0$ のとき $f_n = 0$ と定める．
- P_0 は射影加群で $q : Q_0 \to M$ は全射なので，ある R 準同型 $f_0 : P_0 \to Q_0$ が存在して $q \circ f_0 = p$ が成り立つ．
- $q \circ f_0 = p$ より $f_0(\operatorname{Ker} p) \subseteq \operatorname{Ker} q$ となる．また，P_1 が射影加群で $d_1^Q : Q_1 \to \operatorname{Im} d_1^Q = \operatorname{Ker} q$ は全射な

ので，以下の図式を可換にする R 準同型 $f_1 : P_1 \to Q_1$ が存在する：

$$\begin{tikzcd}
Q_1 \arrow[r, "d_1^Q"] & \operatorname{Im} d_1^Q \arrow[r, equal] & \operatorname{Ker} q \\
 & & \operatorname{Ker} p \arrow[u, "f_0"'] \\
 & & \operatorname{Im} d_1^P \arrow[u, equal] \\
 & & P_1 \arrow[u, "d_1^P"'] \arrow[uuull, bend left, "f_1"]
\end{tikzcd}$$

このとき，図式

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "d_1^P"] \arrow[d, "f_1"'] & P_0 \arrow[d, "f_0"] \\
Q_1 \arrow[r, "d_1^Q"'] & Q_0
\end{tikzcd}$$

は可換になる．

- $d_1^Q \circ f_1 = f_0 \circ d_1^P$ より $f_1(\operatorname{Ker} d_1^P) \subseteq \operatorname{Ker} d_1^Q$ となる．また, P_2 が射影加群で $d_2^Q : Q_2 \to \operatorname{Im} d_2^Q = \operatorname{Ker} d_1^Q$ は全射なので，以下の図式を可換にする R 準同型 $f_2 : P_2 \to Q_2$ が存在する：

$$\begin{tikzcd}
Q_2 \arrow[r, "d_2^Q"] & \operatorname{Im} d_2^Q \arrow[r, equal] & \operatorname{Ker} d_1^Q \\
 & & \operatorname{Ker} d_1^P \arrow[u, "f_1"'] \\
 & & \operatorname{Im} d_2^P \arrow[u, equal] \\
 & & P_2 \arrow[u, "d_2^P"'] \arrow[uuull, bend left, "f_2"]
\end{tikzcd}$$

このとき，図式

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "d_1^P"] \arrow[d, "f_1"'] & P_0 \arrow[d, "f_0"] \\
Q_1 \arrow[r, "d_1^Q"'] & Q_0
\end{tikzcd}$$

は可換になる．

- 以後同様の構成を繰り返していくことで，条件を満たす鎖写像 $f_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet$ が定まる．

(2) まずは以下の主張を示す：

主張. 鎖写像 $f_\bullet, g_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet$ が $q \circ f_0 = p$, $q \circ g_0 = p$ を満たすとする．このとき，$f_\bullet \sim g_\bullet$ である．

主張の証明. ホモトピー $s_n : P_n \to Q_{n+1}$ を順に構成していく．

- $n < 0$ のとき，$s_n = 0$ と定める．

- $q \circ f_0 = p = q \circ g_0$ より $q \circ (f_0 - g_0) = 0$ となる．従って，$\mathsf{Im}(f_0 - g_0) \subseteq \mathsf{Ker}\, q$ となる．ここで，P_0 が射影加群で $d_1^Q : Q_1 \to \mathsf{Im}\, d_1^Q$ が全射なので，以下の図式を可換にする R 準同型 $s_0 : P_0 \to Q_1$ が存在する：

$$\begin{tikzcd} Q_1 \arrow[r, "d_1^Q"] & \mathsf{Im}\, d_1^Q \arrow[r, equal] & \mathsf{Ker}\, q \\ & & P_0 \arrow[u, "f_0 - g_0"'] \arrow[llu, bend left, "s_0"] \end{tikzcd}$$

このとき，

$$f_0 - g_0 = d_1^Q \circ s_0 = s_{-1} \circ d_0^P + d_1^Q \circ s_0$$

が成り立つ（$d_0^P = 0 : P_0 \to P_{-1} = 0$）．
- $d_1^Q \circ (f_1 - g_1) = (f_0 - g_0) \circ d_1^P = (d_1^Q \circ s_0) \circ d_1^P = d_1^Q \circ (s_0 \circ d_1^P)$ より $d_1^Q \circ (f_1 - g_1 - s_0 \circ d_1^P) = 0$ となり，$\mathsf{Im}(f_1 - g_1 - s_0 \circ d_1^P) \subseteq \mathsf{Ker}\, d_1^Q$ を得る．ここで，P_1 が射影加群で $d_2^Q : Q_2 \to \mathsf{Im}\, d_2^Q$ は全射なので，以下の図式を可換にする R 準同型 $s_1 : P_1 \to Q_2$ が存在する：

$$\begin{tikzcd} Q_2 \arrow[r, "d_2^Q"] & \mathsf{Im}\, d_2^Q \arrow[r, equal] & \mathsf{Ker}\, d_1^Q \\ & & P_1 \arrow[u, "f_1 - g_1 - s_0 \circ d_1^P"'] \arrow[llu, bend left, "s_1"] \end{tikzcd}$$

このとき，

$$f_1 - g_1 = s_2 \circ d_1^P + d_2^Q \circ s_1$$

が成り立つ．
- 以後同様の構成を繰り返していくことで，$f_\bullet$ と $g_\bullet$ の間のホモトピー $s = (s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ を得る．□

(1) により，鎖写像 $f_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet$, $g_\bullet : Q_\bullet \to P_\bullet$ が存在して $q \circ f_0 = p$, $p \circ g_0 = q$ が成り立つ．このとき，$p \circ (g_0 \circ f_0) = q \circ f_0 = p = p \circ (\mathsf{id}_{P_\bullet})_0$ が成り立つので主張より $g_\bullet \circ f_\bullet \sim \mathsf{id}_{P_\bullet}$ となる．同様に $f_\bullet \circ g_\bullet \sim \mathsf{id}_{Q_\bullet}$ も分かる．従って，$P_\bullet$ と $Q_\bullet$ はホモトピー同値．■

最後に射影分解に関する基本的な事実を紹介する：

命題 5.12 (Horseshoe lemma)**.** $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ を R 加群の完全列，$P_\bullet^L$, $P_\bullet^N$ をそれぞれ L, N の射影分解とする．このとき，M の射影分解 $P_\bullet^M$，鎖写像 $f_\bullet : P_\bullet^L \to P_\bullet^M$, $g_\bullet : P_\bullet^M \to P_\bullet^N$ が存在して，以下の条件を満たす：

- 以下の図式が可換：

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \\ P_0^L \arrow[u] \arrow[r, "f_0"'] & P_0^M \arrow[u] \arrow[r, "f_0"'] & P_0^N \arrow[u] \end{tikzcd}$$

- 任意の $n \geq 0$ に対して $0 \to P_n^L \xrightarrow{f_n} P_n^M \xrightarrow{g_n} P_n^N \to 0$ が完全列.

コメント． *Horseshoe lemma*（*horseshoe* = 蹄鉄）という名前は初めに与えられた以下の図式が蹄鉄の形に似ていることから来ている：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & & 0 & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[u] \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
 & P_0^L \arrow[u, "p^L"] & & P_0^N \arrow[u, "p^N"'] & \\
 & P_1^L \arrow[u, "d_1^L"] & & P_1^N \arrow[u, "d_1^N"'] & \\
 & P_2^L \arrow[u, "d_2^L"] & & P_2^N \arrow[u, "d_2^N"'] & \\
 & \vdots \arrow[u, "d_3^L"] & & \vdots \arrow[u, "d_3^N"'] &
\end{tikzcd}$$

命題 5.12 の証明.

- P_0^N が射影加群なので，ある R 準同型写像 $s : P_0^N \to M$ が存在して，$g \circ s = p^N$ が成り立つ．このとき，P_0^M, $p^M : P_0^M \to M$, $f_0 : P_0^L \to P_0^M$, $g_0 : P_0^M \to P_0^N$ を以下のように定義する：
  - $P_0^M := P_0^L \oplus P_0^N$
  - $p^M := (f \circ p^L, s) : P_0^M \to M,\ (x, y) \mapsto f(p^L(x)) + s(y)$
  - $f_0 : P_0^L \to P_0^M,\ x \mapsto (x, 0)$
  - $g_0 : P_0^M \to P_0^N,\ (x, y) \mapsto y$

  このとき，図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0^L \arrow[u, "p^L"] \arrow[r, "f_0"'] & P_0^M \arrow[u, "p^M"] \arrow[r, "f_0"'] & P_0^N \arrow[u, "p^N"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{$*$}$$

  は可換，各列が完全，かつ縦の写像は全射である．

- $(*)$ に蛇の補題（定理 4.14）を用いると，完全列

$$0 \to \mathsf{Ker}(p^L) \to \mathsf{Ker}(p^M) \to \mathsf{Ker}(p^N) \to 0$$

  を得る．図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathsf{Ker}(p^L) \arrow[r] & \mathsf{Ker}(p^M) \arrow[r] & \mathsf{Ker}(p^N) \arrow[r] & 0 \\
 & P_1^L \arrow[u, "d_1^L"] & & P_1^N \arrow[u, "d_1^L"'] &
\end{tikzcd}$$

  に対して上の構成と同様にして P_1^M, $d_1^M : P_1^M \to \mathsf{Ker}(p^M)$, $f_1 : P_1^L \to P_1^M$, $g_1 : P_1^M \to P_1^N$ を構成

することができる．このとき，図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathsf{Ker}(p^L) \arrow[r] & \mathsf{Ker}(p^M) \arrow[r] & \mathsf{Ker}(p^N) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_1^L \arrow[r, "f_1"] \arrow[u, "d_1^L"] & P_1^M \arrow[r, "g_1"] \arrow[u, "d_1^M"] & P_1^N \arrow[r] \arrow[u, "d_1^L"'] & 0
\end{tikzcd}$$

は可換，各列が完全，かつ縦の写像は全射である．可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_0^L \arrow[r, "f_0"'] & P_0^M \arrow[r, "f_0"'] & P_0^N \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathsf{Ker}(p^L) \arrow[r] \arrow[u] & \mathsf{Ker}(p^M) \arrow[r] \arrow[u] & \mathsf{Ker}(p^N) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_1^L \arrow[r, "f_1"] \arrow[u, "d_1^L"] & P_1^M \arrow[r, "g_1"] \arrow[u, "d_1^M"] & P_1^N \arrow[r] \arrow[u, "d_1^L"'] & 0
\end{tikzcd}$$

をつなげることで，可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_0^L \arrow[r, "f_0"] & P_0^M \arrow[r, "g_0"] & P_0^N \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_1^L \arrow[r, "f_1"] \arrow[u, "d_1^L"] & P_1^M \arrow[r, "g_1"] \arrow[u, "d_1^M"] & P_1^N \arrow[r] \arrow[u, "d_1^L"'] & 0
\end{tikzcd}$$

を得る．

- 以後同様にして P_n^M, $d_n^M : P_n^M \to P_{n-1}^M$, $f_n : P_n^L \to P_n^M$, $g_n : P_n^M \to P_n^N$ を構成すると，
  - M の射影分解 $P_\bullet^M := (\cdots \to P_2^M \xrightarrow{d_2^M} P_1^M \xrightarrow{d_1^M} P_0^M \to 0)$
  - 鎖写像 $f_\bullet : P_\bullet^L \to P_\bullet^M$, $g_\bullet : P_\bullet^M \to P_\bullet^N$

  が得られ，条件を満たす．

■

5.3 Tor 加群

R 加群の単完全列 $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ と R 加群 X に対して，

$$L \otimes_R X \xrightarrow{f \otimes_R \mathsf{id}_X} M \otimes_R X \xrightarrow{g \otimes_R \mathsf{id}_X} N \otimes_R X \to 0$$

は完全である．この節では，$f \otimes_R \mathsf{id}_X$ が単射からどれぐらい遠いかを測る Tor 加群を導入する．

定義 5.13. M, N を R 加群，$n \in \mathbb{Z}$ とする．このとき，M と N の n **番目の**[a]**Tor 加群**（n**th Tor module**）$\mathsf{Tor}_n^R(M, N)$ を以下のように定義する：

M の射影分解 $P_\bullet$ を取り，

$$\mathsf{Tor}_n^R(M, N) := \mathsf{H}_n(P_\bullet \otimes_R N)$$

と定義する．

ここで，$P_\bullet \otimes_R N$ は

$$P_\bullet \otimes_R N = (\cdots P_2 \otimes_R N \xrightarrow{d_2 \otimes \mathsf{id}_N} P_1 \otimes_R N \xrightarrow{d_1 \otimes \mathsf{id}_N} P_0 \otimes_R N \to 0)$$

なる鎖複体である．従って，

$$\mathsf{Tor}_n^R(M, N) = \mathsf{Ker}(d_n \otimes \mathsf{id}_N) / \mathsf{Im}(d_{n+1} \otimes \mathsf{id}_N)$$

と表すことができる．

---

[a] Tor という名前は torsion（ねじれ）から取られている

注意． $n < 0$ のとき $P_n = 0$ なので，$\mathsf{Tor}_n^R(M, N) = 0$ となる．

射影分解は一通りには決まらないが，それを用いて定義される Tor 加群は一通りに決まる：

命題 5.14. $\mathsf{Tor}_n^R(M, N)$ は M の射影分解の取り方によらない（どの射影分解を取っても全て同型になる）．

証明． $P_\bullet$, $Q_\bullet$ を M の射影分解とする．このとき，命題 5.11(2) より $P_\bullet$ と $Q_\bullet$ はホモトピー同値になる．このことから，$P_\bullet \otimes_R N$ と $Q_\bullet \otimes_R N$ もホモトピー同値であることが分かる（一般に，$s = (s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ が $f_\bullet$ と $g_\bullet$ の間のホモトピーのとき，$s \otimes id_N := (s_n \otimes \mathsf{id}_N)_{n \in \mathbb{Z}}$ は $f_\bullet \otimes \mathsf{id}_N$ と $g_\bullet \otimes \mathsf{id}_N$ の間のホモトピーとなる）．従って，系 4.25 より

$$\mathsf{H}_n(P_\bullet \otimes_R N) \cong \mathsf{H}_n(Q_\bullet \otimes_R N)$$

が成り立つ． ■

Tor 加群の基本的な性質を述べる：

命題 5.15. (1) $\mathsf{Tor}_0^R(M, N) \cong M \otimes_R N$

(2) P が射影加群のとき，全ての $n \neq 1$ に対して $\mathsf{Tor}_n^R(P, N) = 0$

(3) $\mathsf{Tor}_n^R(M, N) \cong \mathsf{Tor}_n^R(N, M)$

(4) $\mathsf{Tor}_n^R(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda, N) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathsf{Tor}_n^R(M_\lambda, N)$

証明． (1) $P_\bullet$ を M の射影分解とする．このとき，定義から

$$\begin{aligned}
\mathsf{Tor}_0^R(M, N) = \mathsf{H}_0(P_\bullet \otimes_R N) &= \mathsf{H}_0(\cdots \to P_1 \overset{1}{\otimes}_R N \xrightarrow{d_1 \otimes \mathsf{id}_N} P_0 \overset{0}{\otimes}_R N \to 0) \\
&= \mathsf{Coker}(P_1 \otimes_R N \xrightarrow{d_1 \otimes \mathsf{id}_N} P_0 \otimes_R N) \\
&\cong \mathsf{Coker}(P_1 \xrightarrow{d_1} P_0) \otimes_R N \\
&\cong M \otimes_R N
\end{aligned}$$

ここで，2 行目の同型は系 4.19 による．

(2) P は射影分解 $P_\bullet = (0 \to \overset{0}{P} \to 0)$ を持つ．従って，$n \neq 1$ に対して

$$\mathsf{Tor}_n(P, N) = \mathsf{H}_n(P_\bullet \otimes_R N) = \mathsf{H}_n(0 \to P \overset{0}{\otimes_R} N \to 0) \cong 0$$

が成り立つ．

(3) 略

(4) $P_{\lambda,\bullet}$ を M_λ の射影分解とする．このとき，各番号ごとの直和を取ることで，$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ の射影分解 $P_\bullet$ を得る（$P_n = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_{\lambda,n}$）．この射影分解を用いれば

$$\mathsf{Tor}_n^R(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, N) = \mathsf{H}_n(P_\bullet \otimes_R N) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{H}_n(P_{\lambda,\bullet} \otimes_R N) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{Tor}_n^R(M_\lambda, N)$$

が示される． ■

命題 5.16. R が PID のとき，任意の R 加群 M, N と $n \geq 2$ に対して $\mathsf{Tor}_n^R(M, N) = 0$.

証明. 命題 5.9 より M は射影分解 $P_\bullet = (0 \to P_1 \to P_0 \to 0)$ を持つ．従って，$n \geq 2$ のとき

$$\mathsf{Tor}_n^R(M, N) = \mathsf{H}_n(P_\bullet \otimes_R N) = \mathsf{H}_n(0 \to P_1 \overset{1}{\otimes_R} N \to P_0 \overset{0}{\otimes_R} N \to 0) = 0.$$

となる． ■

例 5.17. (1) R を整域とする．$0 \neq a \in R$ に対して R 加群 R/aR を考える．このとき，R/aR は射影分解 $P_\bullet = (0 \to \overset{1}{R} \xrightarrow{a} \overset{0}{R} \to 0)$ を持つ．従って，R 加群 N に対して

$$\begin{aligned}
\mathsf{Tor}_n^R(R/aR, N) &\cong \mathsf{H}_n(P_\bullet \otimes_R M) \\
&\cong \mathsf{H}_n(0 \to R \overset{1}{\otimes_R} N \xrightarrow{a} R \overset{0}{\otimes_R} N \to 0) \\
&\cong \mathsf{H}_n(0 \to \overset{1}{N} \xrightarrow{a} \overset{0}{N} \to 0) \\
&\cong \begin{cases} \mathsf{Coker}(N \xrightarrow{a} N) = N/aN & (n = 0) \\ \mathsf{Ker}(N \xrightarrow{a} N) = \{x \in N \mid ax = 0\} & (n = 1) \\ 0 & (n \neq 0, 1) \end{cases}
\end{aligned}$$

R 加群 N の元 x は「ある $0 \neq a \in R$ が存在して $ax = 0$」を満たすとき，**ねじれ元（torsion element）**という．従って，この計算から

$$\bigcup_{0\neq a\in R} \mathsf{Tor}_1^R(R/aR, N) = \{x \in N \mid x \text{ はねじれ元 }\}$$

となる．これが Tor 加群の名前の由来である．

(2) $a, b \in \mathbb{Z}$ とし，$\mathsf{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/b\mathbb{Z})$ を計算する．

$n = 1$ の場合：

- $a = 0$ のとき，命題 5.15(2) より $\mathsf{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}) = 0$.

- $a \neq 0$ のとき，(1) より

$$\mathsf{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}) \cong \{x + b\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \mid ax \in b\mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \quad (d = \mathsf{gcd}(a, b)).$$

従って，命題 5.15(2) と命題 5.16 と合わせて，

$$\mathsf{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} & (n = 0, 1) \\ 0 & (n \neq 0, 1) \end{cases}$$

となる．

これを用いれば，定理 2.28 と命題 5.15(4) により全ての有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群の Tor 加群を計算することができる．

(3) $\mathbb{F}$ を体とする．自然数 $n \geq 1$ に対して環 $R = \mathbb{F}[x]/(x^n)$ を考える．自然数 $1 \leq i, j \leq n$ に対して $\mathsf{Tor}_m^R(R/\overline{x}^i R, R/\overline{x}^j R)$ を計算する．

例 5.10(2) により，R 加群 $R/\underline{x}^i R$ は射影分解 $P_\bullet := (\cdots \xrightarrow{\overline{x}^{n-i}} R \xrightarrow{\overline{x}^i} R \xrightarrow{\overline{x}^{n-i}} R \xrightarrow{\overline{x}^i} R \to 0)$ を持つ．従って，

$$\begin{aligned}
\mathsf{Tor}_m^R(R/\overline{x}^i R, R/\overline{x}^j R) &= \mathsf{H}_m(P_\bullet \otimes_R R/\overline{x}^j R) \\
&= \mathsf{H}_m(\cdots \xrightarrow{\overline{x}^{n-i}} \overset{3}{R \otimes_R R/\underline{x}^j R} \xrightarrow{\overline{x}^i} \overset{2}{R \otimes_R R/\underline{x}^j R} \xrightarrow{\overline{x}^{n-i}} \overset{1}{R \otimes_R R/\underline{x}^j R} \xrightarrow{\overline{x}^i} \overset{0}{R \otimes_R R/\underline{x}^j R} \to 0) \\
&\cong \mathsf{H}_m(\cdots \xrightarrow{\overline{x}^{n-i}} \overset{3}{R/\overline{x}^j R} \xrightarrow{\overline{x}^i} \overset{2}{R/\overline{x}^j R} \xrightarrow{\overline{x}^{n-i}} \overset{1}{R/\overline{x}^j R} \xrightarrow{\overline{x}^i} \overset{0}{R/\overline{x}^j R} \to 0)
\end{aligned}$$

従って，

$$\mathsf{Tor}_m^R(R/\overline{x}^i R, R/\overline{x}^j R) \cong \begin{cases} \mathsf{Ker}(R/\overline{x}^j R \xrightarrow{\overline{x}^i} R/\overline{x}^j R)/\,\mathsf{Im}(R/\overline{x}^j R \xrightarrow{\overline{x}^{n-i}} R/\overline{x}^j R) & (m \text{ は奇数}) \\ \mathsf{Ker}(R/\overline{x}^j R \xrightarrow{\overline{x}^{n-i}} R/\overline{x}^j R)/\,\mathsf{Im}(R/\overline{x}^j R \xrightarrow{\overline{x}^i} R/\overline{x}^j R) & (m \text{ は偶数}) \end{cases}$$

となる，

ここで，任意の整数 k, j に対して

- $\mathsf{Ker}(R/\overline{x}^j R \xrightarrow{\overline{x}^k} R/\overline{x}^j R) = \begin{cases} \overline{x}^{j-k} R/\overline{x}^j R & (k \leq j) \\ R/\overline{x}^j R & (k > j) \end{cases}$
- $\mathsf{Im}(R/\overline{x}^j R \xrightarrow{\overline{x}^k} R/\overline{x}^j R) = \begin{cases} \overline{x}^k R/\overline{x}^j R & (k \leq j) \\ 0 & (k > j) \end{cases}$

となることに注意すると，$n - j \leq i \leq j$ のとき，

$$\mathsf{Tor}_m^R(R/\overline{x}^i R, R/\overline{x}^j R) \cong \begin{cases} (\overline{x}^{j-i} R/\overline{x}^j R)/(\overline{x}^{n-i} R/\overline{x}^j R) \cong \overline{x}^{j-i} R/\overline{x}^{n-i} R & (m \text{ は奇数}) \\ (\overline{x}^{j-(n-i)} R/\overline{x}^j R)/(\overline{x}^i R/\overline{x}^j R) \cong \overline{x}^{j+i-n} R/\overline{x}^i R & (m \text{ は偶数}) \end{cases}$$

$n - j \leq i \leq j$ でない場合も同様に計算できる．

この例のように射影分解が具体的に計算できれば Tor 加群も計算できる．ただし，一般には射影分解を具体的に計算することは難しい．しかし，以下の定理を用いることで具体的に計算ができなくても様々なことが分かる．

定理 5.18. $0 \to L \to M \to N \to 0$ を R 加群の完全列，X を R 加群とする．このとき，R 加群の完全列

$$\begin{gathered}\cdots \to \mathrm{Tor}_{n+1}^R(N, X) \to \mathrm{Tor}_n^R(L, X) \to \mathrm{Tor}_n^R(M, X) \to \mathrm{Tor}_n^R(N, X) \to \\ \vdots \\ \to \mathrm{Tor}_1^R(N, X) \to L \otimes_R X \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_X} M \otimes_R X \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}_X} N \otimes_R X \to 0\end{gathered}$$

が存在する．

証明. $P_\bullet^L$, $P_\bullet^N$ をそれぞれ L, N の射影分解とし，命題 5.12 のように M の射影分解 $P_\bullet^M$，鎖写像 $f_\bullet : P_\bullet^L \to P_\bullet^M$, $g_\bullet : P_\bullet^M \to P_\bullet^N$ をとる．

ここで，$0 \to P_n^L \xrightarrow{f_n} P_n^M \xrightarrow{g_n} P_n^N \to 0$ に補題 5.4 を用いることで，$s_n \circ f_n = \mathrm{id}_{P_n^L}$ を満たす R 準同型 $s_n : P_n^M \to P_n^L$ が存在することが分かる（P_n^N が射影的なので，$r_n : P_n^N \to P_n^M$ が存在して $g_n \circ r_n = \mathrm{id}_{P_n^N}$ を満たす）．このとき，$(s_n \otimes \mathrm{id}_X) \circ (f_n \otimes \mathrm{id}_X) = (s_n \circ f_n) \otimes \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{P_n^L} \otimes \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{P_n^L \otimes_R X}$ が成り立つので，完全列

$$0 \to P_n^L \otimes_R X \xrightarrow{f_n \otimes \mathrm{id}_X} P_n^M \otimes_R X \xrightarrow{g_n \otimes \mathrm{id}_X} P_n^N \otimes_R X \to 0$$

を得る．従って，鎖写像 $f_\bullet : P_\bullet^L \to P_\bullet^M$, $g_\bullet : P_\bullet^M \to P_\bullet^N$ は定理 4.15 の条件を満たすので，ホモロジー加群の完全列

$$\begin{gathered}\cdots \to \mathrm{H}_{n+1}(P_\bullet^N \otimes_R X) \to \mathrm{H}_n(P_\bullet^L \otimes_R X) \to \mathrm{H}_n(P_\bullet^M \otimes_R X) \to \mathrm{H}_n(P_\bullet^N \otimes_R X) \to \\ \vdots \\ \to \mathrm{H}_1(P_\bullet^N \otimes_R X) \to \mathrm{H}_0(P_\bullet^N \otimes_R X) \to \mathrm{H}_0(P_\bullet^M \otimes_R X) \to \mathrm{H}_0(P_\bullet^L \otimes_R X) \to 0\end{gathered}$$

これが定理の主張の完全列に他ならない． ■

系 5.19. $0 \to L \to M \to N \to 0$ を R 加群の完全列，X を R 加群とする．このとき，

$$\mathrm{Tor}_1^R(N, X) = 0 \Longrightarrow \text{「}0 \to L \otimes_R X \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_X} M \otimes_R X \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}_X} N \otimes_R X \to 0 \text{ が完全列」}$$

5.4 普遍係数定理

この節では Tor 加群の応用として，以下の定理を示す．この定理は次の章で単体複体のホモロジー加群を計算する際に用いられる．

定理 5.20 (普遍係数定理)**.** $F_\bullet = (\cdots \to F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots)$ を $\mathbb{Z}$ 加群の鎖複体で，各 F_n が自由加群となっているものとする．このとき，任意の $\mathbb{Z}$ 加群 X と $n \in \mathbb{Z}$ に対して，$\mathbb{Z}$ 同型

$$\mathrm{H}_n(F_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} X) \cong (\mathrm{H}_n(F_\bullet) \otimes_{\mathbb{Z}} X) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathrm{H}_{n-1}(F_\bullet), X)$$

が存在する．

証明. $\mathsf{H}_n := \mathsf{H}_n(F_\bullet)$, $\mathsf{Z}_n := \mathsf{Ker}(d_n)$, $\mathsf{B}_n := \mathsf{Im}(d_{n+1})$ と置く．このとき，定義から $\mathsf{H}_n = \mathsf{Z}_n/\mathsf{B}_n$ となり，完全列

$$0 \to \mathsf{B}_n \to \mathsf{Z}_n \to \mathsf{H}_n \to 0$$

を得る．自由 $\mathbb{Z}$ 加群の部分加群も自由加群なので，B_{n-1}，Z_{n-1} は自由加群．従って，命題 5.15(2) と定理 5.18 より，完全列

$$\mathsf{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathsf{Z}_n, X) = 0 \to \mathsf{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathsf{H}_n, X) \to \mathsf{B}_n \otimes_{\mathbb{Z}} X \xrightarrow{\alpha_n} \mathsf{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} X \to \mathsf{H}_n \otimes_{\mathbb{Z}} X \to 0$$

を得る．この完全列より

$$\mathsf{Ker}(\alpha_n) \cong \mathsf{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathsf{H}_n, X), \quad \mathsf{Coker}(\alpha_n) \cong \mathsf{H}_n \otimes_{\mathbb{Z}} X \tag{$*$}$$

を得る．

次に，鎖複体 $\mathsf{B}'_\bullet$ と $\mathsf{Z}_\bullet$ をそれぞれ

$$\mathsf{B}'_\bullet = (\cdots \to \overset{n}{\mathsf{B}_{n-1}} \xrightarrow{0} \overset{n-1}{\mathsf{B}_{n-2}} \xrightarrow{0} \cdots), \quad \mathsf{Z}_\bullet = (\cdots \to \overset{n}{\mathsf{Z}_n} \xrightarrow{0} \overset{n-1}{\mathsf{Z}_{n-1}} \xrightarrow{0} \cdots)$$

と定義する（$\mathsf{B}'_\bullet$ の次数は B_n の添字とずれているので $'$ を付けています）．また，包含写像 $\mathsf{Z}_n \subseteq F_n$ と全射 $d_n : F_n \to \mathsf{B}_{n-1}$ により，鎖写像 $f_\bullet : \mathsf{Z}_\bullet \to F_\bullet$, $g_\bullet : F_\bullet \to \mathsf{B}'_\bullet$ が定まる．ここで，準同型定理（定理 2.12）より同型 $F_n/\mathsf{Z}_n \cong \mathsf{B}_{n-1}$ が存在するので，完全列

$$0 \to \mathsf{Z}_n \xrightarrow{f_n} F_n \xrightarrow{g_n} \mathsf{B}_{n-1} \to 0$$

を得る．さらに，B_{n-1} は自由加群なので，命題 5.15(2) と系 5.19 より完全列

$$0 \to \mathsf{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} X \xrightarrow{f_n} F_n \otimes_{\mathbb{Z}} X \xrightarrow{g_n} \mathsf{B}_{n-1} \otimes_{\mathbb{Z}} X \to 0$$

を得る．従って，鎖写像 $f_\bullet \otimes \mathsf{id}_X$, $g_\bullet \otimes \mathsf{id}_X$ に定理 4.15 を用いると，完全列

$$\cdots \to \mathsf{B}_n \otimes_{\mathbb{Z}} X \xrightarrow{\alpha_n} \mathsf{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} X \to \mathsf{H}_n(F_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} X) \to \mathsf{B}_{n-1} \otimes_{\mathbb{Z}} X \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \mathsf{Z}_{n-1} \otimes_{\mathbb{Z}} X \to \cdots$$

を得る（ここで，$\mathsf{H}_n(\mathsf{B}'_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} X) \cong \mathsf{B}_{n-1} \otimes_{\mathbb{Z}} X$, $\mathsf{H}_n(\mathsf{Z}_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} X) \cong \mathsf{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} X$ に注意しておく）．この完全列から短完全列

$$0 \to \mathsf{Coker}\,\alpha_n \to \mathsf{H}_n(F_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} X) \to \mathsf{Ker}\,\alpha_{n-1} \to 0$$

を得る．また，$(*)$ より $\mathsf{Ker}\,\alpha_{n-1} \cong \mathsf{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathsf{H}_{n-1}, X)$, $\mathsf{Coker}\,\alpha_n \cong \mathsf{H}_n \otimes_{\mathbb{Z}} X$ なので，完全列

$$0 \to \mathsf{H}_n \otimes_{\mathbb{Z}} X \xrightarrow{\beta} \mathsf{H}_n(F_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} X) \to \mathsf{Ker}\,\alpha_{n-1} \to 0 \tag{$**$}$$

を得る．今，$\gamma : \mathsf{H}_n(F_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} X) \to \mathsf{H}_n \otimes_{\mathbb{Z}} X$ を

$$\gamma(\overline{\sum_{i=1}^{k} a_i \otimes x_i}) = \sum_{i=1}^{k} \overline{a_i} \otimes x_i$$

と定義すると $\gamma \circ \beta = \mathsf{id}$ が成り立つ（詳細略）．従って，補題 5.4 を $(**)$ に用いることで同型

$$\mathsf{H}_n(F_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} X) \cong \mathsf{Ker}\,\alpha_{n-1} \oplus (\mathsf{H}_n \otimes_{\mathbb{Z}} X) = \mathsf{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathsf{H}_{n-1}, X) \oplus (\mathsf{H}_n \otimes_{\mathbb{Z}} X)$$

が示される． ■

補題 5.21. 体 $\mathbb{F}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．このとき，任意の有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群 M に対して

$$\mathsf{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{F})=0$$

となる．

証明. 定理 2.27 より，M は

$$\mathbb{Z}^k\oplus\mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}/a_r\mathbb{Z}\quad(0\neq a_i\in\mathbb{Z})$$

の形の $\mathbb{Z}$ 加群と同型である．従って，命題 5.15(4) より，任意の $a\in\mathbb{Z}$ に対して

$$\mathsf{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z},\mathbb{F})=0$$

となることを示せば良い．

$a=0$ の場合は命題 5.15(2) より従い，$a\neq 0$ の場合は例 5.17(1) より

$$\mathsf{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z},\mathbb{F})\cong\{x\in\mathbb{F}\mid ax=0\}=0$$

が従う． ■

系 5.22. 体 $\mathbb{F}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．$F_\bullet=(\cdots\to F_n\xrightarrow{d_n}F_{n-1}\to\cdots)$ を $\mathbb{Z}$ 加群の鎖複体で，各 F_n が自由加群となっているものとする．このとき，任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して，$\mathbb{Z}$ 同型

$$\mathsf{H}_n(F_\bullet\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{F})\cong\mathsf{H}_n(F_\bullet)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{F}$$

が存在する．

演習問題

問題 5.1. $\mathbb{Z}$ 加群と $\mathbb{Z}$ 準同型写像の列

$$X_\bullet=(\cdots\xrightarrow{\cdot 4}\overset{2}{\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}}\xrightarrow{\cdot 6}\overset{1}{\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}}\xrightarrow{\cdot 4}\overset{1}{\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}}\xrightarrow{\cdot 6}\overset{0}{\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}}\to 0)$$

を考える．ここで，$\cdot 4$, $\cdot 6$ はそれぞれ 4 倍，6 倍する写像.

(1) $X_\bullet$ が鎖複体であることを示せ.

(2) $\mathsf{H}_0(X_\bullet)$, $\mathsf{H}_1(X_\bullet)$, $\mathsf{H}_2(X_\bullet)$ を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の形で表せ.

問題 5.2. 環 $R=\mathbb{R}[x,y]/(x,y)$ を考える．また，x,y を代表元とする R の元をそれぞれ $\overline{x}:=x+(x,y),\overline{y}:=y+(x,y)$ と書く．

(1) R 加群 $R/\overline{x}R$ の射影分解を一つ求めよ．

(2) $\mathsf{Tor}_1^R(R/\overline{x}R,R/\overline{y}R)$ を計算せよ．

(3) $\mathsf{Tor}_2^R(R/\overline{x}R,R/\overline{y}R)$ を計算せよ．

問題 5.3. $S := \{f : [0,\pi] \to \mathbb{R} \mid f$ は連続関数 $\}$ を関数の和と積により環とみなす．S の部分集合 R, M をそれぞれ

$$R := \{f : [0,\pi] \to \mathbb{R} \mid f \text{ は連続関数かつ } f(0) = f(\pi)\}$$
$$M := \{u : [0,\pi] \to \mathbb{R} \mid u \text{ は連続関数かつ } u(0) = -u(\pi)\}$$

とする．このとき，以下の問いに答えよ：

(1) (i) R は S の部分環となることを示せ

(ii) $f \in R, u \in M \Longrightarrow fu \in M$ を示せ

以降，R を (i) により環とみなし，M を (ii) により R 加群とみなす．

このとき，以下の設問に答えることで M が射影加群かつ自由加群でないことを示せ：

(2) (i) $f, g \in R$ に対して $f\sin x + g\cos x,\ f\cos x - g\sin x \in M$ を示せ

(ii) $u, v \in M$ に対して $u\sin x + v\cos x,\ u\cos x - v\sin x \in R$ を示せ

(iii) R 同型写像 $\varphi : M^2 \xrightarrow{\cong} R^2$ を一つ見つけることで，M が射影加群であることを示せ（ただし，$M^2 = M \oplus M,\ R^2 = R \oplus R$）

(3) $N := \langle uv \mid u, v \in M\rangle$（$= \{uv \mid u, v \in M\}$ で生成される R 部分加群）と定義したとき，$N = R$ を示せ．

ヒント：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ を使う

(4) M が自由加群でないことを示せ．

ヒント 1：M が自由加群と仮定すると，(3) より，ある S の可逆元 u を用いて $M = Ru$ と表せる（これは認めても良い）．

ヒント 2：M が自由加群であると仮定し，中間値の定理を用いて矛盾を導く

6　単体複体のホモロジーへの応用

6.1　単体複体のホモロジー

ホモロジー代数学は元々空間の性質を代数的に調べる手法として現れた．この節ではその大元となる単体複体のホモロジーについて簡単に解説する．

以下，R を可換環とする．

定義 6.1. $\mathbb{R}^N$ の $n+1$ 個の点 $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が一般の位置にあるとは，n 個のベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}_0$$

が一次独立であるときにいう．

一般の位置にある $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に対して，$\mathbb{R}^N$ の部分集合

$$\langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i \;\middle|\; t_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{n} = 1 \right\}$$

を $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ によって張られる n **単体**（n**-simplex**）または n **次元の単体**と呼ぶ．

$m+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_m}$ に対して，$\langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ の部分集合

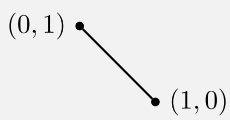
$$\langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_m} \rangle := \left\{ \sum_{j=0}^{m} a_j \boldsymbol{v}_{i_j} \;\middle|\; t_j \geq 0,\ \sum_{j=0}^{m} = 1 \right\}$$

を $\langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ の m **次元の面**（m**-face**）という．特に, 0 次元, 1 次元の面をそれぞれ $\langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ の**頂点**（**vertex**），**辺**（**edge**）と呼ぶ．

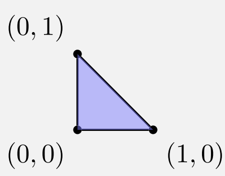
また，空集合は -1 次元の面と思うことにする．

コメント． $\langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ は $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を頂点に持つような多面体である．

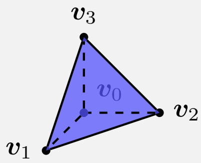
例 6.2. (1) 頂点 $\boldsymbol{v}_0 = (0,1)$, $\boldsymbol{v}_1 = (1,0)$ を持つ 1 単体 $\langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1 \rangle$ は以下の図のようになる：



(2) 頂点 $\boldsymbol{v}_0 = (0,0)$, $\boldsymbol{v}_1 = (0,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,0)$ を持つ 2 単体 $\langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ は以下の図のようになる：



(3) 頂点 $\boldsymbol{v}_0 = (0,0,0)$, $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0,0,1)$ を持つ 3 単体 $\langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ は以下の図のようになる：



定義 6.3. (1) $\mathbb{R}^N$ 内の有限個の単体からなる集合 K が条件

(i) K の元の面は再び K の元である

(ii) K の元 σ, τ に対して，$\sigma \cap \tau$ は σ と τ の面である（空集合でも良い）

を満たすとき，**単体複体（simplicial complex）**という．K に含まれる単体の次元の最大値を K の**次元（dimension）**と呼び，$\dim(K)$ と表す．

(2) K_m で K に含まれる m 単体全体の集合を表す．定義から $K_m = \emptyset$ $(m > \dim(K))$

(3) K に含まれる単体の和集合

$$|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$$

を K が定める**多面体（polyhedron）**と呼ぶ．

例 6.4. (1) n 単体 $\sigma := \langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ の全ての面の集合 K_σ は単体複体である．このとき，m 単体の集合 $(K_\sigma)_m$ は

$$(K_\sigma)_m := \{ \langle \boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_m} \rangle \mid 0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n \}$$

であり，$\binom{n}{m}$ 個の元からなる．また，定義から容易に分かるように

$$|K_\sigma| = \sigma$$

が成り立つ．つまり，この単体複体 K_σ が定める多面体は n 単体 σ 自身である．

(2) $\boldsymbol{v}_0 = (0,0,0)$, $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0,0,1)$ に対して，

$$\begin{aligned}
K &= K_0 \cup K_1 \cup K_2 \\
K_0 &= \{ \langle \boldsymbol{v}_0 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_2 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_3 \rangle \} \\
K_1 &= \{ \langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_2 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_3 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle \} \\
K_2 &= \{ \langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle \}
\end{aligned}$$

と定めると K は単体複体となる．このとき，$|K|$ は 3 単体 $\langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ からその内部を除いた表面のみからなる図形である．

もっと一般に，n 単体 $\sigma = \langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ に対して，σ の σ 以外の面全体の集合

$$K_{\partial\sigma} := K_\sigma \setminus \{\sigma\}$$

は単体複体となり，

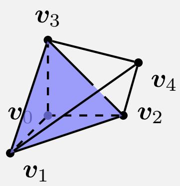
$$|K_{\partial\sigma}| = \partial\sigma \ (= \sigma \text{ の内部を除いた表面のみからなる図形})$$

が成り立つ．

(3) $\boldsymbol{v}_4$ を 3 単体 $\sigma = \langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ の外側にある点とする．このとき，

$$\begin{aligned}
K &:= K_0 \cup K_1 \cup K_2 \\
K_0 &:= \{\langle \boldsymbol{v}_0 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_2 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_3 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_4 \rangle\} \\
K_1 &:= \{\langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_2 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_3 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_4 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle\} \\
K_2 &:= \{\langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle\}
\end{aligned}$$

と定めると K は単体複体となる．このとき，$|K|$ は $|K_\sigma|$ に辺 $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_4 \rangle$,$\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4 \rangle$,$\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle$ をくっつけた以下のような図形である：



以下，単体複体 K を固定し，K の頂点に $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と番号づけをしておく．このとき，K の元は $\langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_m} \rangle$ と書けるが，その頂点は $i_0 < i_1 < \cdots < i_m$ となるように並べ変えておく．

定義 6.5. 各自然数 m に対して R 加群 $C_m(K; R)$ と R 準同型 $d_m : C_m(K; R) \to C_{m-1}(K; R)$ を以下のように定義する：

- $C_m(K; R)$ は K_m の元を基底に持つような自由 R 加群：

$$C_m(K; R) = \bigoplus_{\sigma \in K_m} R\sigma \ (\cong R^{\# K_m})$$

- K_m の元 $\sigma = \langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_m} \rangle$ に対して

$$d_m(\sigma) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_{j-1}}, \boldsymbol{v}_{i_{j+1}} \ldots, \boldsymbol{v}_{i_m} \rangle$$

以下の補題により，$C_m(K; R)$ と d_m は鎖複体

$$C_\bullet(K; R) := (\cdots \xrightarrow{d_3} C_2(K; R) \xrightarrow{d_2} C_1(K; R) \xrightarrow{d_1} C_0(K; R) \to 0)$$

を定める．

補題 6.6. 任意の m に対して $d_{m-1} \circ d_m = 0$.

証明. m 単体 $\langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_m} \rangle$ に対して

$$d_{m-1} \circ d_m(\langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_m} \rangle) = 0$$

を示せば十分である．小さな m に対してこれを確かめる（一般の m については演習問題 6.1）：

- $m = 2$：

$$\begin{aligned}
d_1 \circ d_2(\langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2} \rangle) &= d_1(\langle \boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2} \rangle - \langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_2} \rangle + \langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_1} \rangle) \\
&= d_1(\langle \boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2} \rangle) - d_1(\langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_2} \rangle) + d_1(\langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_1} \rangle) \\
&= (\langle \boldsymbol{v}_{i_2} \rangle - \langle \boldsymbol{v}_{i_1} \rangle) - (\langle \boldsymbol{v}_{i_2} \rangle - \langle \boldsymbol{v}_{i_0} \rangle) + (\langle \boldsymbol{v}_{i_1} \rangle - \langle \boldsymbol{v}_{i_0} \rangle) \\
&= 0
\end{aligned}$$

- $m = 3$：

$$\begin{aligned}
&d_2 \circ d_3(\langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \boldsymbol{v}_{i_3} \rangle) \\
&\quad = d_2(\langle \boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \boldsymbol{v}_{i_3} \rangle - \langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \boldsymbol{v}_{i_3} \rangle + \langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_3} \rangle - \langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2} \rangle) \\
&\quad = d_2(\langle \boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \boldsymbol{v}_{i_3} \rangle) - d_2(\langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \boldsymbol{v}_{i_3} \rangle) + d_2(\langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_3} \rangle) - d_2(\langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2} \rangle) \\
&\quad = (\langle \boldsymbol{v}_{i_2}, \boldsymbol{v}_{i_3} \rangle - \langle \boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_3} \rangle + \langle \boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2} \rangle) - (\langle \boldsymbol{v}_{i_2}, \boldsymbol{v}_{i_3} \rangle - \langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_3} \rangle + \langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_2} \rangle) \\
&\qquad\quad + (\langle \boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_3} \rangle - \langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_3} \rangle + \langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_1} \rangle) - (\langle \boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2} \rangle - \langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_2} \rangle + \langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_1} \rangle) \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

■

定義 6.7. 鎖複体 $C_\bullet(K;R)$ のホモロジー加群 $\mathsf{H}_m(K;R) := \mathsf{H}_m(C_\bullet(K;R))$ を **K の R 係数の m 次ホモロジー群**（**mth homology group**）という．

注意. 通常係数環 R としては体 $\mathbb{F}$ または $\mathbb{Z}$ を考えることが多い．$\mathbb{F}$ 係数のホモロジー群の方が計算が易しいが，$\mathbb{Z}$ 係数のホモロジー群の方がより多くの情報を持っている：

$$\mathsf{H}_m(K;\mathbb{F}) \cong \mathsf{H}_m(K;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F} \quad (\text{普遍係数定理})$$

この節では，これ以降主に R が体 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ の場合のみ考える．

例 6.8. (1) 3 単体 $\sigma = \langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ の面全体からなる単体複体 K_σ を考える．$\sigma_{i_0,i_1,\ldots,i_t} :=$

$\langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{v}_{i_t} \rangle$ と書くことにすると，

$$
\begin{aligned}
C_0(K_\sigma;\mathbb{F}) &= \mathbb{F}\sigma_0 \oplus \mathbb{F}\sigma_1 \oplus \mathbb{F}\sigma_2 \oplus \mathbb{F}\sigma_3 \cong \mathbb{F}^4 \\
C_1(K_\sigma;\mathbb{F}) &= \mathbb{F}\sigma_{0,1} \oplus \mathbb{F}\sigma_{0,2} \oplus \mathbb{F}\sigma_{0,3} \oplus \mathbb{F}\sigma_{1,2} \oplus \mathbb{F}\sigma_{2,3} \cong \mathbb{F}^6 \\
C_2(K_\sigma;\mathbb{F}) &= \mathbb{F}\sigma_{0,1,2} \oplus \mathbb{F}\sigma_{0,1,3} \oplus \mathbb{F}\sigma_{0,2,3} \oplus \mathbb{F}\sigma_{1,2,3} \cong \mathbb{F}^4 \\
C_3(K_\sigma;\mathbb{F}) &= \mathbb{F}\sigma_{0,1,2,3} \cong \mathbb{F} \\
d_1(\sigma_{0,1}) &= \sigma_1 - \sigma_0,\ d_1(\sigma_{0,2}) = \sigma_2 - \sigma_0,\ d_1(\sigma_{0,3}) = \sigma_3 - \sigma_0, \\
d_1(\sigma_{1,2}) &= \sigma_2 - \sigma_1,\ d_1(\sigma_{1,3}) = \sigma_3 - \sigma_1,\ d_1(\sigma_{2,3}) = \sigma_3 - \sigma_2 \\
d_2(\sigma_{0,1,2}) &= \sigma_{1,2} - \sigma_{0,2} + \sigma_{0,1},\ d_2(\sigma_{0,1,3}) = \sigma_{1,3} - \sigma_{0,3} + \sigma_{0,1}, \\
d_2(\sigma_{0,2,3}) &= \sigma_{2,3} - \sigma_{0,3} + \sigma_{0,2},\ d_2(\sigma_{1,2,3}) = \sigma_{2,3} - \sigma_{1,3} + \sigma_{1,2} \\
d_3(\sigma_{0,1,2,3}) &= \sigma_{1,2,3} - \sigma_{0,2,3} + \sigma_{0,1,3} - \sigma_{0,1,2}
\end{aligned}
$$

となる．従って，$C_\bullet(K_\sigma;\mathbb{F})$ は

$$
0 \to \mathbb{F} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \mathbb{F}^4 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{F}^6 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{F}^4 \to 0
$$

と表すことができる．

以下 $C_\bullet(K_\sigma;\mathbb{F})$ のホモロジーを計算する：

- d_1 の表現行列の階数は 3 なので $\dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Im}\, d_1) = 3$ となる．従って
$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{H}_0(C_\bullet(K_\sigma;\mathbb{F}))) = \dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^4 / \mathsf{Im}\, d_1) = 4 - \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Im}\, d_1) = 4 - 3 = 1$$
となり，$\mathsf{H}_0(C_\bullet(K_\sigma;\mathbb{F})) \cong \mathbb{F}$.
- d_2 の表現行列の階数は 3 なので，$\dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Im}\, d_2) = 3$ となる．また，$\dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Ker}\, d_1) = 6 - \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Im}\, d_1) = 6 - 3 = 3$ より
$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{H}_1(C_\bullet(K_\sigma;\mathbb{F}))) = \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Ker}\, d_1 / \mathsf{Im}\, d_2) = \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Ker}\, d_1) - \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Im}\, d_2) = 3 - 3 = 0$$
となり，$\mathsf{H}_1(C_\bullet(K_\sigma;\mathbb{F})) = 0$.
- d_3 の表現行列の階数は 1 なので，$\dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Im}\, d_3) = 1$ となる．また，$\dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Ker}\, d_2) = 4 - \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Im}\, d_2) = 4 - 3 = 1$ より
$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{H}_2(C_\bullet(K_\sigma;\mathbb{F}))) = \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Ker}\, d_2 / \mathsf{Im}\, d_3) = \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Ker}\, d_2) - \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Im}\, d_3) = 1 - 1 = 0$$
となり，$\mathsf{H}_2(C_\bullet(K_\sigma;\mathbb{F})) = 0$.
- $\dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{H}_3(C_\bullet(K_\sigma;\mathbb{F}))) = \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Ker}\, d_3) = 1 - \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Im}\, d_3) = 1 - 1 = 0$ となり，$\mathsf{H}_3(C_\bullet(K_\sigma;\mathbb{F})) = 0$.

以上より，
$$\mathsf{H}_m(K_\sigma;\mathbb{F}) \cong \begin{cases} \mathbb{F} & (m = 0) \\ 0 & (m \neq 0) \end{cases}$$
となる．

一般の n 単体 σ に対しても

$$\mathsf{H}_m(K_\sigma;\mathbb{F}) \cong \begin{cases} \mathbb{F} & (m=0) \\ 0 & (m \neq 0) \end{cases}$$

が成り立つことを示すことができる．

(2) K を例 6.4(2) の単体複体とする．このとき，(1) と同じ記号で

$$\begin{aligned} C_0(K;\mathbb{F}) &= \mathbb{F}\sigma_0 \oplus \mathbb{F}\sigma_1 \oplus \mathbb{F}\sigma_2 \oplus \mathbb{F}\sigma_3 \cong \mathbb{F}^4 \\ C_1(K;\mathbb{F}) &= \mathbb{F}\sigma_{0,1} \oplus \mathbb{F}\sigma_{0,2} \oplus \mathbb{F}\sigma_{0,3} \oplus \mathbb{F}\sigma_{1,2} \oplus \mathbb{F}\sigma_{1,3} \oplus \mathbb{F}\sigma_{2,3} \cong \mathbb{F}^6 \\ C_2(K;\mathbb{F}) &= \mathbb{F}\sigma_{0,1,2} \oplus \mathbb{F}\sigma_{0,1,3} \oplus \mathbb{F}\sigma_{0,2,3} \oplus \mathbb{F}\sigma_{1,2,3} \cong \mathbb{F}^4 \\ d_1(\sigma_{0,1}) &= \sigma_1 - \sigma_0,\ d_1(\sigma_{0,2}) = \sigma_2 - \sigma_0,\ d_1(\sigma_{0,3}) = \sigma_3 - \sigma_0, \\ d_1(\sigma_{1,2}) &= \sigma_2 - \sigma_1,\ d_1(\sigma_{1,3}) = \sigma_3 - \sigma_1,\ d_1(\sigma_{2,3}) = \sigma_3 - \sigma_2 \\ d_2(\sigma_{0,1,2}) &= \sigma_{1,2} - \sigma_{0,2} + \sigma_{0,1},\ d_2(\sigma_{0,1,3}) = \sigma_{1,3} - \sigma_{0,3} + \sigma_{0,1}, \\ d_2(\sigma_{0,2,3}) &= \sigma_{2,3} - \sigma_{0,3} + \sigma_{0,2},\ d_2(\sigma_{1,2,3}) = \sigma_{2,3} - \sigma_{1,3} + \sigma_{1,2} \end{aligned}$$

となり，$C_\bullet(K;\mathbb{F})$ は

$$0 \to \mathbb{F}^4 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{F}^6 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{F}^4 \to 0$$

と表すことができる．
この場合，鎖複体の形から 0 次と 1 次のホモロジー群は (1) と全く同じものになることが分かる．
一方で，

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{H}_2(C_\bullet(K;\mathbb{F}))) = \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Ker}\, d_2) = 4 - \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{Im}\, d_2) = 4 - 3 = 1$$

より $\mathsf{H}_2(C_\bullet(K;\mathbb{F})) \cong \mathbb{F}$ となる．従って，

$$\mathsf{H}_m(K;\mathbb{F}) \cong \begin{cases} \mathbb{F} & (m=0,2) \\ 0 & (m \neq 0,2) \end{cases}$$

となる．この結果は $|K_\sigma|$ の

$$2\text{ 次元の穴（四面体の内部）の数 } 1 = \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{H}_2(K_\sigma;\mathbb{F}))$$

を示している．
一般の n 単体 σ に対しても $K_{\partial\sigma}$ のホモロジー群が

$$\mathsf{H}_m(K_{\partial\sigma};\mathbb{F}) \cong \begin{cases} \mathbb{F} & (m=0,n-1) \\ 0 & (m \neq 0,n-1) \end{cases}$$

をとなることを示すことができる．

(3) K を例 6.4(3) の単体複体とする．(1)(2) と同様に $\sigma_{i_0,i_1,\ldots,i_m} := \langle \boldsymbol{v}_{i_0}, \boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_m} \rangle$ と表すことにすると，

$$
\begin{aligned}
&C_0(K;\mathbb{F}) = \mathbb{F}\sigma_0 \oplus \mathbb{F}\sigma_1 \oplus \mathbb{F}\sigma_2 \oplus \mathbb{F}\sigma_3 \oplus \mathbb{F}\sigma_4 \cong \mathbb{F}^5 \\
&C_1(K;\mathbb{F}) = \mathbb{F}\sigma_{0,1} \oplus \mathbb{F}\sigma_{0,2} \oplus \mathbb{F}\sigma_{0,3} \oplus \mathbb{F}\sigma_{1,2} \oplus \mathbb{F}\sigma_{1,3} \oplus \mathbb{F}\sigma_{2,3} \oplus \mathbb{F}\sigma_{1,4} \oplus \mathbb{F}\sigma_{2,4} \oplus \mathbb{F}\sigma_{3,4} \cong \mathbb{F}^9 \\
&C_2(K;\mathbb{F}) = \mathbb{F}\sigma_{0,1,2} \oplus \mathbb{F}\sigma_{0,1,3} \oplus \mathbb{F}\sigma_{0,2,3} \oplus \mathbb{F}\sigma_{1,2,3} \cong \mathbb{F}^4 \\
&\ d_1(\sigma_{0,1}) = \sigma_1 - \sigma_0,\ d_1(\sigma_{0,2}) = \sigma_2 - \sigma_0,\ d_1(\sigma_{0,3}) = \sigma_3 - \sigma_0, \\
&\ d_1(\sigma_{1,2}) = \sigma_2 - \sigma_1,\ d_1(\sigma_{1,3}) = \sigma_3 - \sigma_1,\ d_1(\sigma_{2,3}) = \sigma_3 - \sigma_2 \\
&\ d_1(\sigma_{1,4}) = \sigma_4 - \sigma_1,\ d_1(\sigma_{2,4}) = \sigma_4 - \sigma_2,\ d_1(\sigma_{3,4}) = \sigma_4 - \sigma_3 \\
&d_2(\sigma_{0,1,2}) = \sigma_{1,2} - \sigma_{0,2} + \sigma_{0,1},\ d_2(\sigma_{0,1,3}) = \sigma_{1,3} - \sigma_{0,3} + \sigma_{0,1}, \\
&d_2(\sigma_{0,2,3}) = \sigma_{2,3} - \sigma_{0,3} + \sigma_{0,2},\ d_2(\sigma_{1,2,3}) = \sigma_{2,3} - \sigma_{1,3} + \sigma_{1,2}
\end{aligned}
$$

となり，$C_\bullet(K;\mathbb{F})$ は

$$
0 \to \mathbb{F}^4 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \mathbb{F}^9 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{F}^5 \to 0
$$

となる．(1)(2) と同じように行列の階数を計算していくと，

$$
\dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{H}_m(K;\mathbb{F})) = \begin{cases} 1 & (m = 0, 2) \\ 2 & (m = 1) \\ 0 & (m \neq 0, 1, 2) \end{cases}
$$

となり，

$$
\mathsf{H}_m(K;\mathbb{F}) \cong \begin{cases} \mathbb{F} & (m = 0, 2) \\ \mathbb{F}^2 & (m = 1) \\ 0 & (m \neq 0, 1, 2) \end{cases}
$$

が分かる．この結果は $|K|$ の

- 2 次元の穴（四面体の内部）の数 $1 = \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{H}_2(K_\sigma;\mathbb{F}))$
- 1 次元の穴（$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4 \rangle$ と $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle$ の内部）の数 $2 = \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{H}_1(K;\mathbb{F}))$

を示している．

定義 6.9. 単体複体 K に対して

$$
\beta_m(K) := \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{H}_m(K;\mathbb{F}))
$$

を K の m **次のベッチ数**（m**th Betti number**）[a b] と呼ぶ．K のベッチ数の交代和

$$
\chi(K) := \sum_{m=0}^{\dim(K)} (-1)^m \beta_m(K)
$$

を K の**オイラー標数（Eular characteristic）**と呼ぶ.

[a] Betti (人)：ベッチ
[b] 直感的には $\beta_m(K) = (|K|$ の m 次元の穴の数)

例 6.10. (1) 例 6.8(1) より n 単体 σ に対して

$$\beta_m(K_\sigma) = \begin{cases} 1 & (m = 0) \\ 0 & (m \neq 0) \end{cases}$$

となり，$\chi(K_\sigma) = 1$.

(2) 例 6.8(2) より n 単体 σ に対して

$$\beta_m(K_{\partial\sigma}) = \begin{cases} 1 & (m = 0, n-1) \\ 0 & (m \neq 0, n-1) \end{cases}$$

となり，$\chi(K_\sigma) = 1 + (-1)^{n-1}1$.

(3) 例 6.4(3) の単体複体 K を考えると例 6.8(3) より

$$\beta_m(K) = \begin{cases} 1 & (m = 0, 2) \\ 2 & (m = 1) \\ 0 & (m \neq 0, 1, 2) \end{cases}$$

となり，$\chi(K) = 1 - 2 + 1 = 0$.

実は以下の補題によりホモロジー群を計算しなくてもオイラー標数は計算できる.

補題 6.11. $\chi(K) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\dim(K)} (-1)^m \# K_m$

証明. 命題 4.13 より従う. ■

ここで定義したホモロジー群は単体複体というかなり特別な対象に対してしか定義されていない. しかし，位相空間の三角形分割を通して幅広い位相空間に対してそのホモロジー群を考えることができる.

定義 6.12. X を位相空間とする. 単体複体 K の多面体 $|K|$ が X と同相であるとき，K を X の**三角形分割（triangulation）**という[a]. K が X の三角形分割のとき，X の m 次の R 係数のホモロジー群を $\mathsf{H}_m(X; R) := \mathsf{H}_m(K; R)$ で定義する. X のベッチ数，オイラー標数も同様に X の三角形分割 K を用いて $\beta_m(X) := \beta_m(K)$, $\chi(X) = \chi(K)$ で定義する.

[a] 可微分多様体というかなり広いクラスの空間は三角形分割を持つことが知られている

以下の定理により $\mathsf{H}_m(X; R)$, $\beta_m(X)$, $\chi(X)$ は X の三角形分割の取り方によらないことが分かる.

定理 6.13. K と K' を単体複体とする．$|K|$ と $|K'|$ が同相であるとき，任意の m に対して R 同型 $\mathsf{H}_m(K;R) \cong \mathsf{H}_m(K';R)$ が存在する．

証明. この定理の証明は大変なので省略するが，代数的位相幾何学の標準的な教科書には大体書いてある． ■

例 6.14. (1) $\mathbb{R}^3$ 内の球面

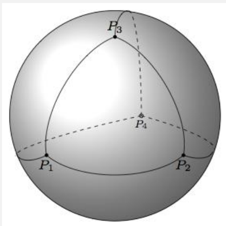
$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

を考える．四面体の内部を除いた側面のみからなる図形は S と同相なので，3 単体 σ に対して $K_\sigma \setminus \{\sigma\}$ は S の三角形分割を与える．

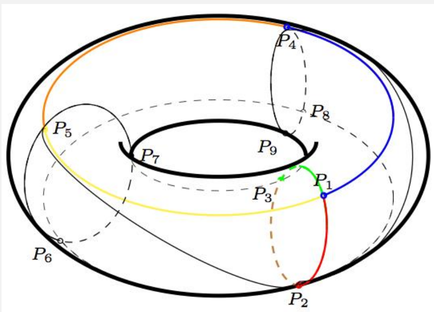
(2) 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 S を考える．S 上の**三角形**とは，3 本の曲線で囲まれた図形のこととする．このとき，曲面 S 上に描いた有限個の三角形の集まり $\{\Delta_k\}_{k=1}^N$ で

$$\Delta_k \cap \Delta_l \text{ は } \Delta_k \text{ と } \Delta_l \text{ の辺，頂点，または空集合となる}$$

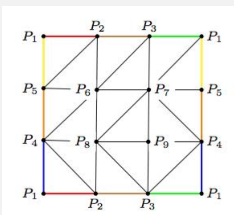
を満たすようなものを与えることは，S の三角形分割を与えることと同値である．
例えば，(1) で与えた球面の三角形分割は以下のように図示できる：



(3) 穴が一つあるドーナツ型の曲面を**トーラス（torus）**と呼ぶ．以下の図はトーラスの三角形分割を与える：



この三角形分割は線 $P_1P_2P_3$ と $P_1P_4P_5$ で切って展開すると以下のようになっている



定理 6.15 (オイラーの多面体定理). $\mathbb{R}^3$ 内の凸多面体 P の頂点の数を v, 辺の数を e, 面の数を f とする. このとき,

$$v - e + f = 2$$

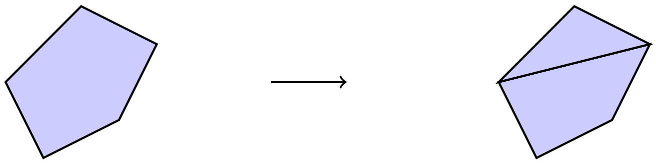
が成り立つ.

証明. まずは次の主張を示す.

主張. K を $\mathbb{R}^3$ 内の球面の三角形分割とすると $\chi(K) = 2$.

主張の証明. 3 単体 σ に対して $K_{\partial\sigma}$ も球面の三角形分割を与えるので, 定理 6.13 および例 6.10(2) より $\chi(K) = \chi(K_{\partial\sigma}) = 2$. □

P の一つの面の対角線に辺を引き, 以下のように三角形と多角形に分割する.



このとき, 頂点の個数は変わらず, 辺の数と面の数がそれぞれ 1 増える. 従って, (頂点の数) − (辺の本数) + (面の数) の値はこの操作で変わず $v-e+f$ のままである. これを繰り返して P の全ての面を三角形に分割するとこれは球面の三角形分割 K を与える. 以上の議論から $(\#K_0)-(\#K_1)-(\#K_2) = v-e+f$ となり, 主張と合わせて

$$v - e + f = (\#K_0) - (\#K_1) - (\#K_2) = \chi(K) = 2$$

を得る. ■

オイラーの多面体定理の応用として以下の有名な結果を示すことができる.

系 6.16. 正多面体は正四面体, 正六面体, 正八面体, 正十二面体, 正二十面体の 5 種類しかない.

証明. 正 n 面体を考える. この頂点の数を v, 辺の数を e, 面の数を f とすると定理 6.15 より $v - e + f = 2$ が成り立つので,

$$\begin{aligned} 4e - 4v - 4f &= -8 \\ 4e^2 - 4ev - 4ef &= -8e \\ (2e-2v)(2e-2f) &= -8e + 4vf \\ \left(\frac{2e}{v} - 2\right)\left(\frac{2e}{f} - 2\right) &= 4 - \frac{8e}{vf} < 4 \end{aligned}$$

となる. ここで,

- 1 つの頂点に k (≥ 3) 本の辺が集まるとすると, 各辺は 2 つの頂点を持つので $kv = 2e$ が成り立つ. 従って $2e/v$ は 3 以上の整数.

- 各面は $f=n$ 本の辺を持ち，1 つの辺は 2 つの面に共有されるので $nf=2e$ が成り立つ．従って $2e/f=n$ は 3 以上の整数.

が成り立つので
$$\left(\frac{2e}{v}-2, \frac{2e}{f}-2\right)=(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)$$
となり,
$$\left(\frac{2e}{v}, \frac{2e}{f}\right)=(3,3),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3)$$

- $(3,3)$ のとき $3v=3f=2e$ を $v-e+f=2$ に代入して $n=f=4$
- $(3,4)$ のとき $3v=4f=2e$ を $v-e+f=2$ に代入して $n=f=6$
- $(4,3)$ のとき $4v=3f=2e$ を $v-e+f=2$ に代入して $n=f=12$
- $(3,5)$ のとき $3v=5f=2e$ を $v-e+f=2$ に代入して $n=f=8$
- $(5,3)$ のとき $5v=3f=2e$ を $v-e+f=2$ に代入して $n=f=20$

■

6.2 単体複体のホモロジー加群の普遍係数定理

R を環とする．この節では普遍係数定理（定理 5.20）を用いて単体複体の R 係数のホモロジー加群を計算する方法を紹介する[*3].

単体複体 K に対して，前節において以下の R 加群の鎖複体を定義した：
$$C_\bullet(K;R):=(\cdots\to C_2(K;R)\xrightarrow{d_2}C_1(K;R)\xrightarrow{d_1}C_0(K;R)\to 0)$$
$$C_m(K;R):=\bigoplus_{\sigma\in K_m}R\sigma\cong R^{\#K_m}$$
ここで，$C_m(K;R)\cong R^{\#K_m}\cong\mathbb{Z}^{\#K_m}\otimes_{\mathbb{Z}}R$ に注意すると，鎖複体の同型
$$C_\bullet(K;R)\cong C_\bullet(K;\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}R$$
を得る．従って，$C_\bullet(K;\mathbb{Z})$ に定理 5.20, 系 5.22 を用いることで以下の定理が分かる．

定理 6.17 (単体複体のホモロジー加群に対する普遍係数定理)**.** 単体複体 K に対して,
$$\mathsf{H}_n(K;R)\cong(\mathsf{H}_n(K;\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}R)\oplus\mathsf{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathsf{H}_{n-1}(K;\mathbb{Z}),R)$$

定理 6.18. $\mathbb{F}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．単体複体 K に対して,
$$\mathsf{H}_n(K;\mathbb{F})\cong\mathsf{H}_n(K;\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{F}$$

[*3] 普遍係数定理の名称は「ホモロジー群の係数が普遍的である（定理 6.17）」から来ている.

注意. 各 $C_m(K;\mathbb{Z})$ が有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群なので，$\mathsf{H}_m(K;\mathbb{Z})$ も有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群である．従って，定理 2.28 より同型

$$\mathsf{H}_m(K;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/a_t\mathbb{Z} \quad (0 \neq a_i \in \mathbb{Z})$$

が存在する．これを用いれば普遍係数定理（定理 6.17）により $\mathsf{H}_m(K;R)$ を計算することができる．

$C_\bullet(K;\mathbb{Z})$ の定義から，この鎖複体に現れる準同型 d_m は体 $\mathbb{F}$ を係数として持つ場合と同様に（$0,1,-1$ のみを成分に持つ）行列で表される．そのホモロジー加群は行列の基本変形を用いて計算することができる（単因子論）．

例 6.19. (1) σ を n 単体とし，例 6.4(1) の K_σ を考える．このとき，

$$\mathsf{H}_m(K_\sigma;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (m=0) \\ 0 & (m \neq 0) \end{cases}$$

となる，従って，任意の環 R に対して，普遍係数定理（定理 6.17）より

$$\mathsf{H}_m(K_\sigma;R) \cong \begin{cases} R & (m=0) \\ 0 & (m \neq 0) \end{cases}$$

(2) σ を n 単体とし，例 6.4 の $K_{\partial\sigma}$ を考える．このとき，

$$\mathsf{H}_m(K_{\partial\sigma};\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (m=0,n-1) \\ 0 & (m \neq 0) \end{cases}$$

となる．従って，任意の環 R に対して，普遍係数定理（定理 6.17）より

$$\mathsf{H}_m(K_{\partial\sigma};R) \cong \begin{cases} R & (m=0,n-1) \\ 0 & (m \neq 0) \end{cases}$$

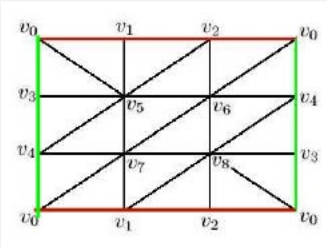
(3) 例 6.4(3) の K を考える．このとき，

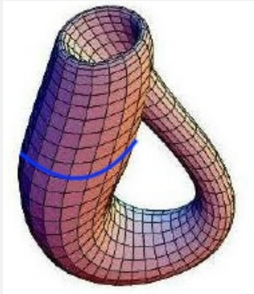
$$\mathsf{H}_m(K;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (m=0,2) \\ \mathbb{Z}^2 & (m=1) \\ 0 & (m \neq 0,1,2) \end{cases}$$

となる．従って，任意の環 R に対して，普遍係数定理（定理 6.17）より

$$\mathsf{H}_m(K;R) \cong \begin{cases} R & (m=0,2) \\ R^2 & (m=1) \\ 0 & (m \neq 0,1,2) \end{cases}$$

(4) 以下の左図のような単体複体 K を考える．





この単体複体の定める多面体 $|K|$ は，緑線と赤線をそれぞれ捻って貼り合わせることで上の右図の図形（**クラインの壺**）となることが分かる．

この単体複体のホモロジー群を計算すると，

$$\mathsf{H}_m(K;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (m=0) \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (m=1) \\ 0 & (m\neq 0,1) \end{cases}$$

となる．従って，任意の環 R に対して，普遍係数定理（定理 6.17）より

$$\mathsf{H}_m(K;R) \cong \begin{cases} R & (m=0) \\ R\oplus R/2R & (m=1) \\ \mathsf{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(R/2R,R)\cong\{a\in R \mid 2a=0\} & (m=2) \\ 0 & (m\neq 0,1,2) \end{cases}$$

このように $\mathbb{Z}$ 係数のホモロジー加群にねじれ元が現れるとき，R 係数のホモロジー加群は $\mathbb{Z}$ 係数の場合よりも多少複雑になる．

ここで，$\mathsf{H}_1(K;\mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の部分がどのような意味を持つものなのか簡単に説明しよう．上図のようにクラインの壺上の青い円を考える．ただし，この円には向きが付けられているとする．この円をクラインの壺の側面に沿って一周動かすと元の位置に戻るが，円の向きは逆向きになる．従って，この操作をもう一度繰り返すと円の向きは元に戻る．このような円は，ホモロジー群の中で 2 倍して 0 になる元，つまり $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の元を定めている．

6.3 抽象単体複体

6.1 節の話を思い出すと，単体複体の頂点がどの位置にあるかは問題ではなく面達がどのような関係にあるかのみが重要であった．そこで，頂点のなす面達の関係のみに着目した以下の概念が定義される．

定義 6.20. (1) 頂点集合 $\{0,1,\ldots,n\}$ を持つ**抽象単体複体（abstract simplicial complex）**とは $\{0,1,\ldots,n\}$ の部分集合の有限部分集合 K であり，

(i) 任意の $i=0,1,\ldots,n$ に対して $\{i\}\in K$

(ii) $F \in K$ かつ $G \subseteq F$ ならば $G \in K$

を満たすもの．

(2) K の元 σ は $\#\sigma = m+1$ のとき m **単体（m-simplex）**という．K_m で m 単体の全体のなす K の部分集合とする．

例 6.21. (1) K を頂点 $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を持つ単体複体とする．このとき，

$$K' = \{\{i_0, i_1, \ldots, i_k\} \mid \langle i_0, i_1, \ldots, i_k \rangle \in K\}$$

は $\{0, 1, \ldots, n\}$ を頂点集合として持つ抽象単体複体となる．

逆に，$\{0, 1, \ldots, n\}$ を頂点集合として持つ抽象単体複体 K に対して，

$$K' = \{\sigma_F \mid F \in K\}$$
$$\sigma_F = \left\{ (x_i)_{0 \le i \le n} \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, x_i \geq 1 \ (0 \le i \le n), x_i = 0 \ (i \notin F), \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

は $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を頂点に持つ単体複体である．

(2) P を有限個の元からなる半順序集合とする．P の部分集合 C が**鎖（chain）**であるとは，C の任意の 2 元 x, y が比較可能（$x \le y$ or $y \le x$）であるときに言う．このとき，

$$\Delta(P) := \{C \mid C \subseteq P \text{ は } P \text{ の鎖 }\}$$

は抽象単体複体となる．これを P の**順序複体（order complex）**と呼ぶ．

(3) G を有限グラフとする（つまり，頂点の集合 V とそれらを結ぶ辺の集合 E からなるもの）．G の頂点の集合 C が**クリーク（clique）**とは，C の任意の 2 元が辺で結ばれているときに言う．このとき，

$$\Delta(G) := \{C \mid C \subseteq V \text{ は } G \text{ のクリーク }\}$$

は抽象単体複体となる．これを G の**クリーク複体（clique complex）**と呼ぶ．

抽象単体複体に対しても単体複体と同様にホモロジー群が定義される．

定義 6.22. K を抽象単体複体，R を環とする．

(1) 各自然数 m に対して R 加群 $C_\bullet(K;R)$ と R 準同型 $d_m : C_m(K;R) \to C_{m-1}(K;R)$ を以下のように定義する：

- $C_m(K;R)$ は K_m の元を基底に持つような自由 R 加群：

$$C_m(K;R) = \bigoplus_{\sigma \in K_m} R\sigma \ (\cong R^{\#K_m})$$

- K_m の元 $\sigma = \{i_0, i_1, \ldots, i_m\}$ に対して

$$d_m(\sigma) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \{i_0, \ldots, i_{j-1}, i_{j+1}, \ldots, i_m\}$$

補題 6.6 と同様に $C_m(K; R)$ と d_m は鎖複体

$$C_\bullet(K; R) := (\cdots \xrightarrow{d_3} C_2(K; R) \xrightarrow{d_2} C_1(K; R) \xrightarrow{d_1} C_0(K; R) \to 0)$$

を定める．

(2) $C_\bullet(K; R)$ のホモロジー加群

$$\mathsf{H}_m(H; R) := \mathsf{H}_m(C_\bullet(K; R))$$

を K の R 係数の m 次ホモロジー群と呼ぶ．

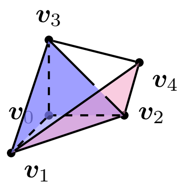
有限半順序集合 P や有限グラフ G に対して，例 6.21(2)(3) で定義された抽象単体複体のホモロジー群を通して P や G を研究する手法が盛んに行われている．そのほかにも様々な対象から抽象単体複体を構成することができ，やはりそれを通してホモロジー代数的な研究が行われている．

演習問題

問題 6.1. 一般の m に対して 補題 6.6 を示せ．

問題 6.2. 以下で与えられる単体複体 K のホモロジー群，ベッチ数，オイラー標数を計算せよ．

$$\begin{aligned}
K &:= K_0 \cup K_1 \cup K_2 \\
K_0 &:= \{\langle \boldsymbol{v}_0 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_2 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_3 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_4 \rangle\} \\
K_1 &:= \{\langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_2 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_3 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_4 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle\} \\
K_2 &:= \{\langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4 \rangle\}
\end{aligned}$$



問題 6.3. 例 6.14(3) で与えた三角形分割を用いてトーラスのホモロジー群，ベッチ数，オイラー標数を計算せよ．

参考文献

[1] D. G. Northcott 著，新妻弘訳；ホモロジー代数入門，共立出版，2010 年
[2] 志甫淳著；層とホモロジー代数，共立出版，2016 年
[3] 雪江明彦著；代数学 2 環と体とガロア理論，日本評論社，2010 年